. . . .
1. Name und Matrikel-Nummer

. . . .
2. Name und Matrikel-Nummer

. . . .
Gruppe

Lineare Algebra I – Blatt 3

hhu Düsseldorf, WiSe 2019/20

Abgabe: bis Mittwoch 30.10.2019 bis 10:15 Uhr, in den Briefkästen

1	2	3	4	Σ

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS1920/`
Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.
Wie üblich sind alle Behauptungen zu beweisen. Wenn Sie Resultate aus der Vorlesung verwenden, geben Sie bitte die zugehörigen Referenznummern mit an.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

(a) Mit $P(A)$ sei die Potenzmenge von A bezeichnet. Seien $A_1, \dots, A_n$ Mengen. Dann gilt $P(A_1) \cup \dots \cup P(A_n) \subseteq P(A_1 \cup \dots \cup A_n)$.

(b) Die Ebenen $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 2x - 6y + 12z = 4\}$ und $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ -x + 3y - 6z = 10\}$ haben keinen gemeinsamen Schnittpunkt.

Mögliches Vorgehen: Direkter Beweis in (a), und Widerspruchsbeweis in (b).

Aufgabe 2 (4 Punkte):

(a) Sind x und y ungerade natürliche Zahlen, dann kann $x^2 + y^2$ keine Quadratzahl sein.

(b) Seien $A_1, \dots, A_n, B$ Teilmengen einer Menge X. Dann ist $(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B)$, kürzer geschrieben: $(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) \cap B = \bigcup_{j=1}^{n} (A_j \cap B)$.

Mögliches Vorgehen: Kontrapositionsbeweis oder direkter Beweis in (a), vollständige Induktion in (b) und vorher erst $n = 2$ zeigen mit Satz L2.4.(6).

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Seien $x, y \in \mathbb{Z}$. Dann sind äquivalent: (a) $x \mid y$, (b) $x \mid -y$, (c) $-x \mid y$, (d) $-x \mid -y$.

(Vgl. Aufgabe 2 Übungsblatt 2) Mögliches Vorgehen: Ringschluss.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Für ganze Zahlen x, y gelte $x \sim y$, falls $x = y \vee x = -y$.

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ ist.

(b) Was sind hier die Äquivalenzklassen?

(c) Geben Sie für jede Klasse einen Repräsentanten an.

(d) Wie kann man "+" sinnvoll auf der Quotientenmenge erklären?

Bitte wenden

Wissensfragen zu L4 und L5: (nur mündlich, ohne Abgabe)

1.) Kann man in der Formulierung mathematischer Sätze Voraussetzungen zusammenfassen?

2.) In welcher Form schreibt man einen Beweis für Ihren Korrektor übersichtlich auf?

3.) Wofür wird der Konjunktiv in der sprachlichen Formulierung von Sätzen benutzt?

4.) Wie kann man einen Kontrapositionsbeweis aufschreiben?

5.) Welche drei Schritte schreibt man bei einem Widerspruchsbeweis auf?

6.) Was ist ein Ringschluss im Gegensatz zu einem Zirkelschluss?

7.) Wie kann ein Beweis eines Satzes geführt werden, in dem die Gleichheit zweier Mengen behauptet wird?

8.) Was ist ein Gegenbeispiel?

9.) Was ist ein Beweis durch vollständige Induktion?

10.) Wie schreibt man einen Beweis durch vollständige Induktion auf?

11.) Was ist das kartesische Produkt zweier Mengen?

12.) Was ist ein Tupel?

13.) Was ist eine zweistellige Relation?

14.) Welche Eigenschaften von Relationen definiert man?

15.) Was ist eine Äquivalenzrelation?

16.) Welche Beispiele für eine Äquivalenzrelation kennen Sie?

17.) Was ist eine Äquivalenzklasse?

18.) Was ist ein Repräsentant einer Äquivalenzklasse?

19.) Wie bezeichnet man die Menge der Äquivalenzklassen?

20.) Warum ergibt eine Äquivalenzrelation in X eine Partition von X?

Kreative Aufgabe (ohne Abgabe, keine Besprechung):

Malen nach Zahlen:
Zeichnen Sie die folgenden Mengen in das Quadrat $[0, 10] \times [0, 10] \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein.
Rot: $\{(x, y);\ 1 < x < 9 \land 1 < y < 9\}$
Gelb: $\{(x, y);\ y < x + 2 \land x < 8 \land y > 2\}$
Blau: $\{(x, y);\ y \leq |x - 1|\}$
Beschreiben Sie ein anderes solches Bild, das nur durch drei Farben und mit maximal drei Ungleichungen pro Farbe auskommt, und vielleicht sogar etwas Konkretes darstellt.