. . . .
1. Name und Matrikel-Nummer

. . . .
2. Name und Matrikel-Nummer

. . . .
Gruppe

Lineare Algebra I – Blatt 4

hhu Düsseldorf, WiSe 2019/20

Abgabe: bis Mittwoch 6.11.2019 bis 10:15 Uhr, in den Briefkästen

1	2	3	4	Σ

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS1920/`
Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.
Wie üblich sind alle Behauptungen zu beweisen. Wenn Sie Resultate aus der Vorlesung verwenden, geben Sie bitte die zugehörigen Referenznummern mit an.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Seien X, Y Mengen mit $X = X_1 \cup X_2$ und $Y = Y_1 \cup Y_2$. Dann gilt $(X_1 \times Y_1) \cup (X_2 \times Y_2) \subseteq X \times Y$, aber im allgemeinen gilt keine Gleichheit anstelle von "$\subseteq$". Unter welcher zusätzlichen Bedingung zur Voraussetzung gilt die Gleichheit? Ist diese Bedingung auch notwendig?

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Sind X und Y endliche Mengen, gilt $\#X \leq \#Y$ und ist $f : X \to Y$ surjektiv, dann ist f bijektiv.

(b) Sind X und Y endliche Mengen, gilt $\#X \geq \#Y$ und ist $f : X \to Y$ injektiv, dann ist f bijektiv.

(c) Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Sind f und g bijektiv, so ist $g \circ f$ bijektiv und es gilt:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Sei X eine Menge.
Dann gibt es keine surjektive Abbildung f von X auf die Potenzmenge $P(X)$.

Hinweis: Man betrachte ein Urbild y der Teilmenge $Y := \{x \in X;\ x \notin f(x)\}$ von X und untersuche, ob $y \in Y$ oder nicht.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

(a) Welche Klassen in $\mathbb{Z}/12$ sind invertierbar (bzgl. der Multiplikation)? Geben Sie $(\mathbb{Z}/12)^*$ an.

(b) Ist $\mathbb{Z}/8$ ein Körper? Was sind die Quadrate in $\mathbb{Z}/8$?

Bitte wenden

Wissensfragen zu L6 und L7: (nur mündlich, ohne Abgabe)

1.) Was sind Definitionsmenge und Zielmenge einer Abbildung?
2.) Was ist der Graph einer Abbildung?
3.) Wann heißen zwei Abbildungen f und g gleich?
4.) Erklären Sie, was die Einschränkung und die Fortsetzung einer Abbildung f ist.
5.) Was ist das Bild von $x \in D$? Und das Urbild von $y \in W$?
6.) Wann nennt man eine Abbildung injektiv, surjektiv, bijektiv?
7.) Was ist die Komposition zweier Abbildungen?
8.) Kommt es auf die Reihenfolge der beiden Abbildungen bei der Kompositionsbildung an? Warum?
9.) Was ist eine Rechtsinverse/Linksinverse/Inverse einer Abbildung?
10.) Unter welchen Voraussetzungen existiert eine Rechts-/Links-/Inverse?
11.) Was ist eine charakteristische Funktion einer Menge?
12.) Was ist eine Familie bzw. ein Tupel? Sind beliebige Indexmengen möglich?
13.) Was ist die kanonische Abbildung der Quotientenmenge $X/\sim$, wenn $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist? Welche Eigenschaft hat diese?
14.) Was ist die Kardinalität einer Menge?
15.) Was ist eine Verknüpfung auf einer Menge H? Wann nennt man H damit eine Halbgruppe, wann eine Gruppe?
16.) Was ist ein Ring R? Was sind die Distributivgesetze?
17.) Was sind die Einheiten eines Rings? Bilden diese eine Gruppe? Warum?
18.) Was ist ein Körper?
19.) Wie erklärt man den Restklassenring $\mathbb{Z}/M$?
20.) In welchen Fällen ist $\mathbb{Z}/M$ sogar ein Körper?

Kreative Aufgabe (ohne Abgabe, keine Besprechung):

Geben Sie eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}$ auf eine echte Teilmenge von $\mathbb{N}$ an.
Geben Sie eine bijektive Abbildung von $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{N}$ an.
Kann es eine Bijektion von $\mathbb{N}$ auf $P(\mathbb{N})$ geben?