. . . .
1. Name und Matrikel-Nummer

. . . .
2. Name und Matrikel-Nummer

. . . .
Gruppe

Lineare Algebra I – Blatt 6

hhu Düsseldorf, WiSe 2019/20

Abgabe: bis Mittwoch 20.11.2019 bis 10:15 Uhr, in den Briefkästen

1	2	3	4	Σ

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS1920/`

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Behauptungen zu beweisen. Wenn Sie Resultate aus der Vorlesung verwenden, geben Sie bitte die zugehörigen Referenznummern mit an.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Sei a eine reelle Zahl und es sei X_a die Menge aller auf $\mathbb{R}$ definierten reellwertigen Funktionen f mit Nullstelle a, d. h.

$$X_a := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(a) = 0\}.$$

(a) Dann ist X_a ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit der Addition und Skalarmultiplikation aus L9.6(2).

(b) Warum ist beispielsweise $Y := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(1) = 1\}$ kein $\mathbb{R}$-Vektorraum?

Aufgabe 2 (4 Punkte):

(a) Sind im $\mathbb{R}^3$ die Untervektorräume $U := L(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix})$ und $W := L(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix})$ gleich oder verschieden?

(b) Betrachten Sie im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}[T]$ die Polynome P_i, Q_i, definiert durch $P_1(T) := T(T-1)$, $P_2(T) := (T+1)(T-1)$, $P_3(T) := T(T+1)$, $Q_1(T) := T$, $Q_2(T) = T^2$.
Sind die Unterräume $L(P_1, P_2, P_3)$ und $L(P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2)$ gleich oder verschieden?
Ist die Familie P_1, P_2, P_3 linear unabhängig? Ist die Familie P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2 linear unabhängig?

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Gegeben seien folgende Vektoren des $\mathbb{R}^3$:

$$x = \begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix},\ u = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

(a) Schreiben Sie den Vektor x als Linearkombination der Vektoren u, v, w.

(b) Gilt $x \in L(u, v)$?

(c) Bestimmen Sie (bis auf Reihenfolge) alle dreielementigen linear unabhängigen Familien mit den Vektoren x, u, v, w. Wie erhält man daraus alle lin. unabh. Familien mit x, u, v, w?

(d) Geben Sie Erzeugendensysteme der Vektorräume $L(u) + L(v)$ und $L(u + v) \cap L(w)$ an.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Seien A und B Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

(a) $A \subseteq L(B) \Rightarrow L(A) \subseteq L(B)$,

(b) $L(L(A) \cap L(B)) = L(A) \cap L(B)$,

(c) $L(A \cup B) = L(L(A) \cup L(B))$.

Bitte wenden

Wissensfragen zu L10 und L11: (nur mündlich, ohne Abgabe)

1.) Wann nennt man eine endliche Familie $v_1, \ldots, v_n$ von Vektoren in einem Vektorraum linear unabhängig?

2.) Warum ist der Nullvektor o linear abhängig?

3.) Wie kann die Lineare Unabhängigkeit von Vektoren $w_1, \ldots, w_m$ eines Vektorraums getestet werden, wenn diese als Linearkombinationen von $v_1, \ldots, v_n$ vorliegen und die Familie $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig ist?

4.) Was ist ein Lineares Gleichungssystem? Was bezeichnet man als seine Lösungsmenge?

5.) Wann heißt ein LGS homogen, wann inhomogen?

6.) Welche elementaren Umformungen führen ein LGS in ein dazu äquivalentes um?

7.) Kann ein LGS unendlich viele Lösungen besitzen?

8.) Unter welcher Voraussetzung an die Anzahl der Gleichungen und Unbekannten ist ein homogenes LGS nichttrivial lösbar?

9.) Unter welcher Voraussetzung an n und m sind m Linearkombinationen von n Vektoren (stets) linear abhängig?

10.) Wann nennt man eine Teilmenge S eines Vektorraums V linear unabhängig?

11.) Was besagt das Abhängigkeitslemma?

12.) Warum gibt es in einer linear abhängigen Menge S einen Vektor v, für den die Lineare Hülle von S mit der von $S \setminus \{v\}$ übereinstimmt?

13.) Wann nennt man eine Familie B von Vektoren eine Basis des Vektorraums?

14.) Was bezeichnet man als die Standardbasis?

15.) Welche 4 wichtigen Sätze über Basen im Vektorraum gibt es? Wie lauten diese?

16.) Was ist die Definition der Dimension eines Vektorraums? Warum ist diese Definition sinnvoll erklärt?

17.) Wie beweist man für endlich erzeugte Vektorräume den Steinitzschen Austauschsatz mit dem Auswahllemma?

18.) Wie beweist man dabei das Auswahllemma?

19.) Welche wichtige Eigenschaft haben Basen laut Basis-Charakterisierungssatz?

20.) Welche zwei Arten von Vektorräumen unterscheidet man prinzipiell (hinsichtlich der Länge von Basen)?

Kreative Aufgabe (ohne Abgabe, keine Besprechung):

Welche Untervektorräume hat der $\mathbb{F}_2$-Vektorraum $(\mathbb{F}_2)^3$?

Welche Untervektorräume hat der $\mathbb{F}_3$-Vektorraum $(\mathbb{F}_3)^2$?