. . . .
1. Name und Matrikel-Nummer

. . . .
2. Name und Matrikel-Nummer

. . . .
Gruppe

Lineare Algebra I – Blatt 7

hhu Düsseldorf, WiSe 2019/20

Abgabe: bis Mittwoch 27.11.2019 bis 10:15 Uhr, in den Briefkästen

1	2	3	4	Σ

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS1920/`
Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.
Wie üblich sind alle Behauptungen zu beweisen. Wenn Sie Resultate aus der Vorlesung verwenden, geben Sie bitte die zugehörigen Referenznummern mit an.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems im $\mathbb{R}^6$.

$$x_2 + x_5 = 2,\ x_4 + x_5 = -1,\ x_2 + x_6 = 1.$$

(b) Geben Sie ein lineares Gleichungssystem an, welches die Teilmenge

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

des $\mathbb{R}^3$ als Lösungsmenge besitzt.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Gegeben seien folgende Vektoren des $\mathbb{R}^4$: $y_1 = e_1$, $y_2 = e_1 + e_2$, $y_3 = e_1 + e_2 + e_3$, $y_4 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, $x_1 = 2e_1 + e_2 + e_3$, $x_2 = -e_2 - e_3$.

(a) Die Familie (y_1, y_2, y_3, y_4) ist ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^4$.

(b) Ergänzen Sie die linear unabhängige Familie (x_1, x_2) durch Vektoren der Familie (y_1, y_2, y_3, y_4) zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$.

(c) Wenden Sie den Steinitzschen Austauschsatz auf die Basis der Einheitsvektoren (e_1, e_2, e_3, e_4) des $\mathbb{R}^4$ und die Familie (x_1, x_2) an.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

(a) Seien U und W komplementäre Untervektorräume des K-Vektorraums V. Sei $(x_1, \dots, x_m)$ Basis von U und $(x_{m+1}, \dots, x_n)$ Basis von W. Dann ist $(x_1, \dots, x_n)$ Basis von V.

(b) Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Dann gibt es für jedes $m \in \{1, \dots, n\}$ Untervektorräume $U_1, \dots, U_m$ von V mit $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_m$.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

(a) Zeigen Sie: Jeder n-dimensionale $\mathbb{C}$-Vektorraum kann als $2n$-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum aufgefasst werden. Geben Sie Vektoren in $\mathbb{C}^2$ an, die linear abhängig über $\mathbb{C}$, nicht aber über $\mathbb{R}$ sind.

(b) Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und U ein $\mathbb{C}$-Untervektorraum von V. Ist für jeden $\mathbb{R}$-Komplementärraum W von U auch $L_{\mathbb{C}}(W)$ ein $\mathbb{C}$-Komplementärraum von U?

Bitte wenden

Wissensfragen zu L12: (nur mündlich, ohne Abgabe)

1.) Warum ist die Dimension von Untervektorräumen höchstens so groß wie die Dimension des umgebenden Raumes?

2.) Wie lautet die Dimensionsformel für Summen zweier Untervektorräume?

3.) Wie lautet diese Formel für direkte Summen zweier Untervektorräume?

4.) Was ist die direkte Summe von k vielen Untervektorräumen?

5.) Warum sind direkte Summen nützlich, wenn man Vektoren als Summe von Vektoren aus den Unterräumen schreiben möchte?

6.) Was ist ein Komplementärraum eines Untervektorraumes U? Ist dieser eindeutig bestimmt?

7.) Wie definiert man den Quotientenvektorraum von V modulo U?

8.) Wie stellt man sich den Quotientenvektorraum einer Ursprungsgeraden im $\mathbb{R}^2$ vor?

9.) Wie lautet die Parameterdarstellung eines affinen Unterraums (d. h. eines Elements im Quotientenvektorraum von V/U)?

10.) Welche Dimension ordnet man einem affinen Unterraum zu?

Kreative Aufgabe (ohne Abgabe, keine Besprechung):

(a) Gegeben sei der 11-dimensionale $\mathbb{F}_2$-Vektorraum $(\mathbb{F}_2)^{11}$. Wieviele Möglichkeiten gibt es, die Standardbasis $(e_1, \ldots, e_{11})$ durch Austauschen von bis zu drei Vektoren aus der linear unabhängigen Familie x_1, x_2, x_3 mit $x_1 = e_1 + e_2 + e_4 + e_{11}$, $x_2 = e_2 + e_{11}$, $x_3 = e_3 + e_7 + e_{11}$ zu einer neuen Basis zusammenzustellen (unter Verwendung des Steinitzschen Austauschsatzes)?

(b) Eine Fußballmannschaft mit 11 Spielern hat drei Ersatzspieler. Der erste kann für Spieler 1,2,4 und 11 ausgewechselt werden, der zweite für Spieler 2 und 11, und der dritte für Spieler 3,7 und 11. Wieviele Möglichkeiten gibt es, unter Berücksichtigung der Ersatzspieler eine Mannschaft aus 11 Spielern zusammenzustellen?