1. Name und Matrikel-Nummer ....

2. Name und Matrikel-Nummer ....

Gruppe ....

Lineare Algebra I – Blatt 8

hhu Düsseldorf, WiSe 2019/20

Abgabe: bis Mittwoch 04.12.2019 bis 10:15 Uhr, in den Briefkästen

1	2	3	4	Σ

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS1920/`
Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.
Wie üblich sind alle Behauptungen zu beweisen. Wenn Sie Resultate aus der Vorlesung verwenden, geben Sie bitte die zugehörigen Referenznummern mit an.

Aufgabe 1 (4 Punkte): Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ gegeben durch $$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y+3z \\ 3x+y \\ 4x-2z \\ 12x+2y-3z \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist.

(b) Bestimmen Sie eine Matrix A so, dass $f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ für alle $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ist.

(c) Bestimmen Sie jeweils eine Basis von $\ker f$ und $\operatorname{im} f$.

Aufgabe 2 (4 Punkte): Seien U, W Untervektorräume des K-Vektorraums V mit $V = U \oplus W$. Weiter sei $f : V \to V$ definiert durch $f(v) = u$, wenn $v = u + w$ mit $u \in U$ und $w \in W$.

(a) Zeigen Sie, dass f eine (wohldefinierte) lineare Abbildung ist.

(b) Bestimmen Sie $\ker f$ und $\operatorname{im} f$.

Aufgabe 3 (4 Punkte): Sei V ein K-Vektorraum. Eine lineare Abbildung $f : V \to V$ heißt idempotent, falls $f \circ f = f$.

(a) Die Abbildung f in Aufgabe 2 ist idempotent.

(b) Die Abbildung $g := \mathrm{id}_V - f$ ist idempotent, wenn f idempotent ist.

(c) Für f, g wie in (b) gilt: $\ker f = \operatorname{im} g$ und $\operatorname{im} f = \ker g$.

Aufgabe 4 (4 Punkte): (a) Zeigen Sie, dass $1, \sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t$ eine Familie linear unabhängiger Vektoren im reellen Vektorraum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist. (**Hinweis:** Betrachten Sie eine beliebige Linearkombination und setzen für t fünf geeignete Werte (z.B. $0, \pi, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{4}$) ein, um ein lineares Gleichungssystem zu erhalten.)

Wir benutzen sie als Basis B für $U := L(1, \sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t)$ und definieren eine Abbildung $D : U \to U$ durch
$$D(x) = x''' + 4x'' + x' - 6x.$$

(b) Bestimmen Sie $D(x)$ für alle $x \in B$ und nutzen Sie dies um die Matrixdarstellung von D bzgl. B, B, d. h. ${}_B[D]_B$, anzugeben.

(c) Berechnen Sie damit den Lösungsraum der linearen (Differential-)Gleichung $D(x) = x_0$ für $x_0 = \sin t - \cos t$.

Erläuterung: Es gilt $(\sin t)' = \cos t$, $(\cos t)' = -\sin t$, $(\sin 2t)' = 2\cos 2t$, $(\cos 2t)' = -2\sin 2t$.

Bitte wenden

Wissensfragen zu L13 und L14: (nur mündlich, ohne Abgabe)

1.) Was ist eine lineare Abbildung zwischen zwei K-Vektorräumen?

2.) Was bezeichnet man als Mono-/Epi-/Iso-/Endo-/Auto-/Homo-morphismus?

3.) Warum sind lineare Abbildungen durch die Angabe der Bilder auf einer Basis schon eindeutig definiert?

4.) Was ist der Kern und das Bild einer linearen Abbildung? Warum sind diese Mengen auch wieder K-Vektorräume?

5.) Wie charakterisiert man injektive lineare Abbildungen mit ihrem Kern?

6.) Wie lautet der Rangsatz für lineare Abbildungen?

7.) Was ist der Rang einer linearen Abbildung?

8.) Wie lässt sich der Rangsatz über den Homophiesatz beweisen?

9.) Was besagt der Homomorphiesatz?

10.) Warum ist ein Endomorphismus eines endlich dimensionalen Vektorraumes injektiv genau dann wenn er surjektiv ist?

11.) Warum ist jeder K-Vektorraum V der Dimension n isomorph zu K^n?

12.) Was ist eine $m \times n$-Matrix über einem Körper K?

13.) Welche Dimension hat der K-Vektorraum $K^{m \times n}$?

14.) Wie wird das Produkt zweier Matrizen definiert?

15.) Welche speziellen Matrizen kennen Sie?

16.) Welche Rechenregeln für Matrizen kennen Sie?

17.) Wie berechnet man das Produkt aus einer Matrix mit einem Spaltenvektor?

18.) Wie kann man ein LGS in Matrixform ausdrücken?

19.) ...Die Spalten einer Matrix sind die Bilder der Einheitsvektoren... Warum eigentlich?

20.) Welche lineare Abbildung kann man einer Matrix zuordnen?

21.) Wie erhält man die Matrix, die eine bestimmte lineare Abbildung darstellt (bezüglich der Standardbasen in Bild- und Urbildraum)?

22.) Welche Abbildung heißt kanonischer Isomorphismus bezüglich einer Basis B eines n-dimensionalen K-Vektorraumes V?

23.) Wie erhält man die Matrix, die eine lineare Abbildung f darstellt (bezüglich gegebener Basen $\mathcal{C}$ bzw. $\mathcal{B}$ in Bild- bzw. Urbildraum)?

24.) Wie erhält man mit dieser Matrix die Koordinaten von $f(v)$ bezüglich der Basis $\mathcal{C}$ des Bildraums?

Kreative Aufgabe (ohne Abgabe, keine Besprechung):

Sei $\mathbb{R}_n[T]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leq n$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}_n[T]$ isomorph zu $\mathbb{R}^{n+1}$ ist, indem Sie sich konkret mindestens zwei verschiedene Isomorphismen überlegen.