. . . .
1. Name und Matrikel-Nummer

. . . .
2. Name und Matrikel-Nummer

. . . .
Gruppe

Lineare Algebra I – Blatt 9

hhu Düsseldorf, WiSe 2019/20

Abgabe: bis Mittwoch 11.12.2019 bis 10:15 Uhr, in den Briefkästen

1	2	3	4	Σ

Vorlesungswebseite: `http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS1920/`
Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.
Wie üblich sind alle Behauptungen zu beweisen. Wenn Sie Resultate aus der Vorlesung verwenden, geben Sie bitte die zugehörigen Referenznummern mit an.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Seien V und W Vektorräume über $\mathbb{R}$ mit Basen $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ bzw. $C = (w_1, w_2, w_3)$.

Sei $f : V \to W$ linear, gegeben durch ${}_C[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Geben Sie die Koordinaten von $f(2v_1 + v_2 - 3v_3 + 2v_4)$ bezüglich der Basis C an.
Ist f injektiv? Ist f surjektiv? Liegt $3w_1 + 5w_2$ in $\mathrm{im}(f)$?

Aufgabe 2 (4 Punkte):

(a) Bestimmen Sie den Rang der Matrix $\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{pmatrix}$.

(b) Berechnen Sie die Inversen der Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, falls möglich.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Seien K-Vektorräume V bzw. W der Dimensionen n bzw. m gegeben. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass jede Matrix $A \in K^{m \times n}$ vom Rang $\mathrm{rg}(A) = \dim \mathrm{im}\, f$ mit passenden Basen B von V und C von W die lineare Abbildung f beschreibt, d. h. ${}_C[f]_B = A$.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Seien V und W endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper K und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

(a) f ist injektiv genau dann, wenn es eine lineare Abbildung g gibt mit $g \circ f = \mathrm{id}_V$.

(b) f ist surjektiv genau dann, wenn es eine lineare Abbildung g gibt mit $f \circ g = \mathrm{id}_W$.

Folgern Sie hieraus, dass für $A \in K^{m \times n}$ gilt:

(c) Es gibt eine Matrix $B \in K^{n \times m}$ mit $AB = I_m$ genau dann, wenn die Zeilen von A linear unabhängig sind.

(d) Es gibt eine Matrix $B \in K^{n \times m}$ mit $BA = I_n$ genau dann, wenn die Spalten von A linear unabhängig sind.

Bitte wenden

Wissensfragen zu L15 und L16: (nur mündlich, ohne Abgabe)

1.) Ist die Komposition und die Summe zweier linearer Abbildungen wieder linear? Gilt das auch für das skalare Vielfache einer linearen Abbildung, und für die Umkehrabbildung eines Isomorphismus?

2.) Welche Formel gilt für den Rang der Komposition $g \circ f$ zweier linearer Abbildungen f und g (zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen)? Gibt es auch eine Abschätzung mit den Rängen von f und g?

3.) Wie definiert man die K-Algebra, die man mit $\mathrm{Hom}(V, W)$ bezeichnet? Was bedeutet $\mathrm{End}(V)$? Welche Teilmenge bildet bezüglich $\circ$ eine Gruppe?

4.) Welcher Isomorphismus bildet $\mathrm{Hom}(V, W)$ auf $K^{m \times n}$ ab? Welche Dimension hat $\mathrm{Hom}(V, W)$ als K-Vektorraum, ausgedrückt mit den Dimensionen von V und W?

5.) Warum ist die Matrixdarstellung der Komposition $g \circ f$ genau das Matrizenprodukt der Matrixdarstellungen von g und f (unter geeigneter Basiswahl)?

6.) Wie folgt damit die Assoziativität des Matrizenprodukts?

7.) Wie ist die inverse Matrix von $A \in K^{n \times n}$ definiert?

8.) Welche Matrixdarstellung hat die Umkehrabbildung eines Isomorphismus f, ausgedrückt mit der Matrixdarstellung von f?

9.) Wie definiert man den Dualraum V^*? Wie nennt man die Elemente des Dualraumes?

10.) Wie definiert man zu einer Basis $B = (x_1, \ldots, x_n)$ von V die duale Basis B^* von V^*?

11.) Wie definiert man zu einer linearen Abb. $f : V \to W$ die transponierte Abb. f^T?

12.) Unter welcher Voraussetzung ist f^T ein Isomorphismus? Wie berechnet sich dann $(f^T)^{-1}$?

13.) Wie berechnet man die Matrixdarstellung von f^T, wenn die von f bekannt ist? (Basen?)

14.) Welche Zahl heißt Spaltenrang, Zeilenrang und Rang einer Matrix A?

15.) Was besagt der Spaltenrang-Satz? Und der analoge Zeilenrang-Satz?

16.) Warum ist Zeilenrang gleich Spaltenrang?

17.) Wie lautet ein (allgemeines) Lösungskriterium zur Lösung eines beliebigen LGS $Ax = b$? Wie kann man die Lösungsmenge des LGS $Ax = b$ beschreiben? Welche Dimension hat diese, ausgedrückt mit dem Rang von A?

18.) Unter welcher Voraussetzung ist ein quadratisches LGS also eindeutig lösbar?

19.) Welche Kriterien zur Invertierbarkeit einer quadratischen Matrix kennen Sie?

20.) Welche Gestalt hat eine Matrix in Zeilenstufenform? Wie lautet das Gaußsche Eliminationsverfahren? Warum terminiert dieser Algorithmus?

21.) Welche Methode eignet sich zur expliziten Rangbestimmung des Ranges einer Matrix?

22.) Wie kann man explizit die Inverse einer Matrix A bestimmen, falls das möglich ist? Wie lautet explizit die Inverse Matrix einer 2×2-Matrix? Ist diese stets berechenbar?

23.) Wie lautet die Inverse Matrix eines Produkts zweier Matrizen? Gibt es ähnliche Formeln mit der Transponierten einer Matrix?

Kreative Aufgabe (ohne Abgabe, keine Besprechung): Sarah bearbeitet ihre Übungen zur Linearen Algebra immer zusammen mit Tim, Ute und Volker, hat aber den Eindruck, in dieser Gruppe mindestens ein Drittel der Arbeit zu leisten. Überhaupt schaffen die Männer höchstens halb so viel wie die Frauen. Allerdings, räumt sie ein, engagieren sich Tim und Ute gleichermaßen. Da stiehlt sich Volker beschämt aus dem Raum, die anderen verharren in Eintracht. Warum?