Probe-Test zur Linearen Algebra I am 02.12.2019 – WiSe 2019/20

hhu Düsseldorf – PD Dr. K. Halupczok **60**-minütiger Probe-Test

*** Bitte bearbeiten Sie für diesen Probe-Test die Hälfte der Aufgaben, die Sie sich selbst aussuchen *** (der gesamte Test ist für 120 Minuten ausgelegt)

Aufgabe 1 Für die richtige Bearbeitung der Teilaufgaben gibt es je 1 Punkt. Dabei sind jeweils nur Ergebnisse einzutragen. *Wichtig: Nur lesbare, vollständige und völlig richtige Einträge werden gewertet.* Arbeiten Sie nicht mit Radierstiften, Bleistift oder Tipp-Ex und vermeiden Sie bitte Durchstreichen.

1.1 Jede lineare Abbildung $g : K^n \to K^m$ wird durch eine Matrix A so beschrieben, dass $g(x) = Ax$ für alle $x \in K^n$ ist. Dabei sind die Spalten der Matrix die ______________ der Einheitsvektoren.

1.2 Man nennt ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$, $A \in K^{m\times n}$, $x \in K^n$, $b \in K^m$, homogen, falls __________ ist.

1.3 Die Menge L aller $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ mit $x - 7y + 4z = 2$ ist gleich

$$L = \{ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$$

Sie ist also ein _____ -dimensionaler ____________________ Unterraum des $\mathbb{R}^3$.

1.4 Eine Teilmenge B eines Vektorraums V heißt Erzeugendensystem von V, falls

____

1.5 Eine endliche Teilmenge B eines Vektorraums V ist eine Basis von V, falls B ein ____ Erzeugendensystem von V ist.

1.6 Ist V ein K-Vektorraum und $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis mit $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$, so nennt man die Komponenten des Vektors $K_B(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ die ____________________ von x bezüglich B. Die Abbildung $K_B :$ __________ $\to$ __________ bezeichnet man als

____

1.7 Zwei affine Unterräume $a+U$ und $b+U$ sind genau dann gleich, wenn $a-b$ _____

1.8 Die Dimension des Bildes $f(V)$ einer linearen Abbildung $f : V \to W$ nennt man den _______________ von f. Kennt man die Dimension von V und die des Kernes von f, so berechnet sich dieser als $\dim f(V) =$ _________________________

1.9 Der K-Vektorraum $K^{m\times n}$ der $m \times n$-Matrizen hat die Dimension _____

1.10 Werden zwei lineare Abbildungen f und g hintereinander ausgeführt, so werden die zugehörigen Matrizen ______________________________

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix},\ f(e_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.\ \text{ Berechnen Sie } f(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}),$$

und geben Sie (mit Begründung) je eine Basis des Kernes $\ker f$ und des Bildes $\operatorname{im} f$ an.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Gibt es drei Vektoren v_1, v_2, v_3 in $\mathbb{R}^3$ so, dass v_1, v_2 linear abhängig sind, v_2, v_3 auch linear abhängig, aber v_1, v_3 linear unabhängig? Wenn ja, geben Sie ein konkretes Beispiel an (mit kurzer Begründung). Wenn nein, begründen Sie, warum nicht.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume des $\mathbb{R}^2$? Begründen Sie jeweils kurz.

$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 0\}$ $\quad T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0\}$ $\quad U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x + y = 1\}$

$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x + y = 0\}$ $\quad W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ xy = 0\}$

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$, welches in Kurzschreibweise gegeben ist (schreiben Sie auch Ihren Rechenweg auf):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $(x, 1, 0), (1, x, 1), (0, 1, x)$ im $\mathbb{R}^3$ linear abhängig?

Aufgabe 7 (5 Punkte)

Stellen Sie die Matrix A auf, die die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$, $f(t, u, v, w) = (t + u, u - v, v + w, w - t, -u + v + w - t)$ darstellt, d. h. mit $f(x) = Ax$ für jedes $x \in \mathbb{R}^4$.

Aufgabe 8 (5 Punkte)

Sei V ein Vektorraum und seien U_1 und U_2 Untervektorräume von V. Beweisen Sie, dass $U_1 \cup U_2$ genau dann Untervektorraum von V ist, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ ist.

Aufgabe 9 (5 Punkte)

Sei V ein 2-dimensionaler $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Gibt es einen Körper $K \supseteq \mathbb{Q}$ so, dass V und K als $\mathbb{Q}$-Vektorräume isomorph sind? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Wenn Sie für Ihren im Tutorat gelösten Probe-Test eine Korrektur wünschen, bitte ausfüllen:

Name: .... Matrikel-Nr.: ....