Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2022/23

Lineare Algebra I – Blatt 0

Dieses Blatt enthält Präsenzaufgaben für die ersten Übungsstunden.
Die ersten Aufgaben zur schriftlichen Abgabe finden Sie auf Blatt 1.

Bitte beachten Sie die allgemeinen Hinweise zur Veranstaltung auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS2223/`.

Aufgabe 0.1

Jede (wohlgeformte) mathematische Aussage ist entweder wahr oder falsch (aber nicht beides), auch wenn wir nicht immer gleich wissen, ob sie nun wahr oder falsch ist. Diskutieren Sie die folgenden „Aussagen“:

(i) Die Zahl 324 ist eine Quadratzahl (d.h., es existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m^2 = 324$).

(ii) Es gibt in unserem Universum schwarze Löcher.

(iii) Die Zahl 777777 ist eine Quadratzahl.

(iv) Es gibt unendlich viele Quadratzahlen, deren Einer-Ziffer eine 9 ist.

(v) Die ersten acht Buchstaben im griechischen Alphabet heißen: α, β, γ, δ, ε, ζ, η, ϑ.

(vi) Es gibt unendlich viele Primzahlen, deren Einer-Ziffer eine 3 ist.

Aufgabe 0.2

Aus einfachen mathematischen Aussagen können durch logische Verknüpfungen kompliziertere Aussagen gebildet werden.

(a) Besprechen Sie, ggf. anhand von sogenannten Wahrheitstafeln, die aussagenlogische Bedeutung der folgenden grundlegenden Verknüpfungen:

„oder“ ($\vee$), „und“ ($\wedge$), „nicht“ ($\neg$), „impliziert“ ($\rightarrow$), „ist äquivalent zu“ ($\leftrightarrow$).

(b) Besprechen Sie die Bedeutung des All-Quantors ($\forall$) und des Existenz-Quantors ($\exists$), anhand der Beispielaussage

$$\forall x \in \mathbb{Q} : \big(x > 0 \ \leftrightarrow \ \forall y \in \mathbb{Q} \, \exists n \in \mathbb{N} : nx > y \big).$$

Was bedeutet die Aussage? Ist sie wahr oder falsch? Warum?

Aufgabe 0.3

Das sogenannte „Paradoxon des Epimenides“ handelt von dem wie folgt überlieferten Vorgang: In einem Gedicht schreibt der Kreter Epimenides (7 Jhr. v. Chr.) in dichterischer Freiheit: „Die Kreter lügen immer.“

(a) Handelt es sich um einen Widerspruch, d.h. eine Paradoxie im Sinne einer Antinomie?

(b) Was können Sie logisch über die zitierte Aussage von Epimenides folgern?

Bitte wenden!

Aufgabe 0.4
Überprüfen Sie die Validität der folgenden Äquivalenzen bzw. Implikationen für Aussagen α, β, γ, etwa durch eine vollständige Fallunterscheidung anhand von Wahrheitstafeln:[1]

(i) $\alpha \vee \beta$ gdw. $\beta \vee \alpha$; und ebenso, $\alpha \wedge \beta$ gdw. $\beta \wedge \alpha$;

(ii) $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma$ gdw. $\alpha \vee (\beta \vee \gamma)$; und ebenso, $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$ gdw. $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$;

(iii) $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$ gdw. $(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$; und ebenso, $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$ gdw. $(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$;

(iv) $\neg(\neg\alpha)$ gdw. α;

(v) $\neg(\alpha \wedge \beta)$ gdw. $(\neg\alpha) \vee (\neg\beta)$; und ebenso, $\neg(\alpha \vee \beta)$ gdw. $(\neg\alpha) \wedge (\neg\beta)$;

(vi) $\alpha \to \beta$ gdw. $(\neg\alpha) \vee \beta$; und $\alpha \to \beta$ gdw. $(\neg\beta) \to (\neg\alpha)$;

(vii) $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \gamma)$ impliziert $\alpha \to \gamma$.

Ordnen Sie die Fachbegriffe zu: Kommutativität, Assoziativität, Distributivität, doppelte Negation, de Morgansche Regeln, Kontraposition, Syllogismus.

Aufgabe 0.5
Überprüfen Sie, unter welchen Bedingungen an die Aussagen α, β, γ die folgende Aussage wahr ist:

$$\Big(\big(\alpha \wedge (\beta \to \gamma)\big) \to \beta\Big) \leftrightarrow \big(\neg\alpha \vee \beta\big).$$

Diskutieren Sie das Ergebnis, insbesondere in Hinblick auf die Rolle von γ.

Aufgabe 0.6
Seien $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,4,5\}$, $C = \{3,4,7\}$, $D = \{1,2,7,8\}$.
(a) Bestimmen Sie

$$(A \cap B) \cup (C \cap D), \qquad (A \cup B) \cap (C \cup D), \qquad (A \setminus B) \setminus C, \qquad A \setminus (B \setminus C).$$

(b) Bestimmen Sie, für Ihre Wahl von $X, Y \in \{A, B, C, D\}$,

$$(X \cup Y) \setminus (X \cap Y) \quad \text{und} \quad (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X).$$

Welche Vermutung haben Sie? Können Sie diese bestätigen?

Aufgabe 0.7
Bestimmen Sie alle rationalen Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$x + 2y = 6 \tag{1}$$
$$2x - y = 2 \tag{2}$$

d. h., geben Sie, ggf. durch eine geeignete Parametrisierung, die Menge aller rationalen Zahlenpaare $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ an, für die die beiden angegebenen Gleichungen simultan gelten.

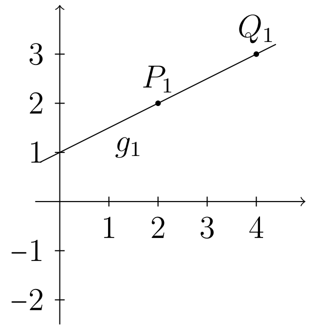
Bitte wenden!

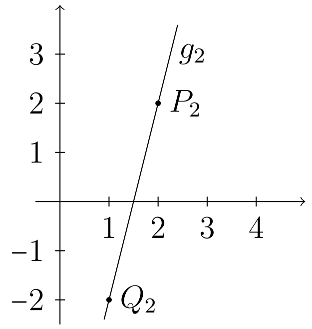
[1] „gdw.“ steht für „genau dann, wenn“

In den nächsten Aufgaben geht es um Geraden bzw. Figuren in der euklidischen Ebene.

Aufgabe 0.8

Bestimmen Sie die Steigungen der unten dargestellten Geraden g_1 und g_2.





Aufgabe 0.9

Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden h durch die Punkte $P = (-1, 3)$ und $Q = (5, -2)$. Liegt der Punkt $R = (3, 0)$ ebenfalls auf h? Falls nicht, wie würden Sie eine Gerade h' ermitteln, die möglichst dicht an den drei Punkten P, Q, R liegt?

Aufgabe 0.10

Bestimmen Sie den Schnitt der durch die folgenden Gleichungen gegebenen Geraden

$$y = \tfrac{1}{2}x + 1, \qquad x = cy + 1$$

in Abhängigkeit von dem Parameter c.
Was können Sie qualitativ ganz allgemein über den Schnitt (i) zweier Geraden in der euklidischen Ebene, (ii) einer Geraden mit einer Ebene im 3-dimensionalen euklidischen Raum, (iii) zweier Ebenen im 3-dimensionalen euklidischen Raum sagen?

Aufgabe 0.11

Betrachten Sie das ebene Dreieck ABC mit Eckpunkten $A = (1, 4)$, $B = (5, 0)$, $C = (7, 3)$. Berechnen Sie den Mittelpunkt ('Schwerpunkt') sowie die Fläche des Dreiecks ABC.

Zum Schluß und zum Spaß eine Knobelaufgabe...

Aufgabe 0.12

Gegeben sei ein Schachbrett, also ein regelmäßig in 8×8 kleinere quadratische Felder unterteiltes quadratisches Brett, dessen Felder abwechselnd weiß und schwarz gefärbt sind. Gegeben seien ferner 32 Dominosteine, die rechteckig seien und genau die Größe zweier aneinandergrenzender Felder dieses Schachbretts haben. Nun ist es sicherlich möglich, die 64 Felder des Schachbretts mit den 32 Dominosteinen komplett zu überdecken, ohne daß ein Stein irgendwo übersteht.
Wir entfernen jetzt (etwa mittels einer Säge) das obere linke und das untere rechte Feld des Schachbretts.
Ist es weiterhin möglich, die verbleibenden 62 Felder des Schachbretts mit 31 Dominosteinen zu bedecken, ohne daß ein Stein irgendwo übersteht? Begründen Sie Ihre Antwort.

(Wenn Sie dieses Rätsel bereits kennen, denken Sie über den Fall nach, daß man zwei andere Felder entfernt. Können Sie eine ganz allgemeine Aussage treffen?)