Lineare Algebra I – Blatt 2

Abgabe der schriftlichen Lösungen zu Aufgaben 2.1, 2.2, 2.3 und 2.4 bis Mittwoch, den 26.10.2022, 10.15 Uhr in den dafür vorgesehenen Kästen

Bitte beachten Sie die allgemeinen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS2223/` ;

verwenden Sie insbesondere das dort bereitgestellte Deckblatt.

Aufgabe 2.1 (4 Punkte)

Beweisen Sie, daß es unendlich viele Primzahlen p gibt, die bei Division mit 4 den Rest 3 lassen. (Die ersten fünf derartigen Primzahlen sind 3, 7, 11, 19, 23.)

Hinweis. Beobachten Sie, daß eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ bei Division mit 4 genau dann den Rest 3 läßt, wenn n von der Form $4k+3$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ ist. Wandeln Sie nun den (z.B. aus der Vorlesung) bekannten Beweis von Euklid für die Unendlichkeit der Primzahlmenge geeignet ab: Betrachten Sie zu endlichen vielen Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$, die jeweils bei Division mit 4 den Rest 3 lassen, Teiler der Zahl $n = 4\prod_{i=1}^{r} p_i - 1$.

Aufgabe 2.2 (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Potenzmenge von $\{1,2,3,4\}$ und zeichnen Sie ein zugehöriges Hasse-Diagramm (auf ein A4-Blatt im Querformat).

Aufgabe 2.3 (4 Punkte)

Seien a, b, a', b' Mengen. Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(1) $\big\{\{a,b\},\{a\}\big\} = \big\{\{a',b'\},\{a'\}\big\}$,

(2) $a = a'$ und $b = b'$.

Bemerkung. Die Definition $(a,b) = \{\{a,b\},\{a\}\}$ liefert also eine explizite mengentheoretische Konstruktion für geordnete Paare: (a,b) ist eindeutig durch seine Koordinaten bestimmt. Diese Darstellung geht auf Kuratowski (1896–1980) zurück.

Aufgabe 2.4 (4 Punkte)

Sei $\alpha\colon A \to A$ eine Abbildung von einer endlichen Menge A in sich. Erläutern Sie, warum die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) α ist injektiv, d. h., für alle $a_1, a_2 \in A$ gilt: aus $a_1\alpha = a_2\alpha$ folgt bereits $a_1 = a_2$;

(ii) α ist surjektiv auf A, d. h., für alle $b \in A$ gibt es wenigstens ein $a \in A$ mit $a\alpha = b$.

Geben Sie Abbildungen von $\mathbb{N}$ in sich an, die zeigen, daß sich keine der beiden Implikationen für unendliche Mengen ‘retten’ läßt.

Die nachfolgende Aufgabe brauchen Sie *nicht* schriftlich zu bearbeiten; es handelt sich eher um eine Knobelaufgabe, die ein wenig Spaß bringen soll.

Aufgabe 2.5

Jedes Viereck $ABCD$ hat bekanntlich zwei Diagonalen: die Verbindungsstrecken AC und BD. Ermitteln Sie allgemeiner, für beliebiges $n \geq 3$, die Anzahl d_n der Diagonalen (d.h. Verbindungsstrecken zwischen zwei nicht benachbarten Ecken) in einem ebenen n-Eck. Begründen Sie die von Ihnen gefundene Formel.