Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2022/23

Lineare Algebra I – Blatt 4

Abgabe der schriftlichen Lösungen zu Aufgaben 4.1, 4.2, 4.3 und 4.4 bis Mittwoch, den 09.11.2022, 10.15 Uhr in den dafür vorgesehenen Kästen

Bitte beachten Sie die allgemeinen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS2223/` ;

verwenden Sie insbesondere das dort bereitgestellte Deckblatt.

Aufgabe 4.1 (4 Punkte)

Seien A, B endliche Mengen. Beweisen Sie, dass $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ gilt.

Hinweis. Begründen Sie die Formel zunächst in dem Fall $A \cap B = \varnothing$, indem Sie wie von der Definition gefordert eine geeignete Bijektion direkt angeben. Nutzen Sie anschließend die Zerlegungen $A = (A \smallsetminus B) \cup (A \cap B)$ und $B = (B \smallsetminus A) \cup (A \cap B)$.

Aufgabe 4.2 (4 Punkte)

Erläutern Sie: Die Menge $\mathcal{P}_{\mathrm{end}}(\mathbb{N}) = \{A \mid A \subseteq \mathbb{N} \text{ ist endlich}\}$ ist abzählbar unendlich, aber die volle Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{A \mid A \subseteq \mathbb{N}\}$ ist *nicht* abzählbar unendlich.

Hinweis. Erinnern Sie sich für die zweite Aussage an das Cantorsche Diagonalargument.

Aufgabe 4.3 (4 Punkte)

(a) Auf $\mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ seien die Verknüpfungen $+, \cdot : \mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ koordinatenweise gegeben, also durch die Festlegungen

$$(a,b) + (a',b') = (a+a', b+b') \qquad \text{und} \qquad (a,b)\cdot(a',b') = (a \cdot a', b \cdot b')$$

für alle $a, b, a', b' \in \mathbb{Q}$.

Bestimmen Sie, ob $\mathbb{Q}^2$ zusammen mit diesen Verknüpfungen einen Körper bildet.

(b) Geben Sie geeignete Additions- und Multiplikationstafeln für endliche Körper $\mathbb{F}_3$ und $\mathbb{F}_4$ mit drei bzw. vier Elementen an.

Freiwilliger Zusatz. Sei $K = \{0, 1, a, b\}$ ein Körper mit 4 Elementen. Erläutern Sie, wie die Abbildungen $\alpha_m \colon K \times K \to K$, $(x,y) \mapsto mx + y$ für $m \in \{1, a, b\}$ Lösungen für das in der Vorlesung vorgestellte Kartenspielpuzzle produzieren: Die insgesamt sechzehn Karten Bube, Dame, König, Ass der Farben Karo, Herz, Pik, Kreuz sind quadratisch so in einem 4×4-Arrangement auszulegen, daß in jeder Reihe und in jeder Spalte jeweils sowohl alle Kartenwerte (B, D, K, A) als auch alle Farbwerte (♢, ♡, ♠, ♣) vertreten sind.

Das Stichwort für eine allgemeinere Problemstellung, die von Euler (1707–1783) untersucht wurde, ist: *griechisch-lateinisches Quadrat.*

Aufgabe 4.4 (4 Punkte)

Sei $m \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(1) Zu jedem $a \in \mathbb{N}_0$ existieren eindeutig bestimmte $q, r \in \mathbb{Z}$ mit $a = qm + r$ und $0 \le r < m$.

(2) Ist m keine Primzahl, so bildet die Struktur $R_m(\mathbb{Z}) = (\{0, 1, \ldots, m-1\}, +_m, \cdot_m)$ der „ganzen Zahlen modulo m“ keinen Körper.

Hinweis. Aussage (1) ist Ihnen als Spezialfall der *Division mit Rest* vertraut. Verwenden Sie für den Nachweis der Existenz die „Methode des kleinsten Verbrechers“, angewandt auf $a \in \mathbb{N}_0$.