Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2022/23

# Lineare Algebra I – Blatt 5

Abgabe der schriftlichen Lösungen zu Aufgaben 5.1, 5.2, 5.3 und 5.4 bis
Mittwoch, den 16.11.2022, 10.15 Uhr in den dafür vorgesehenen Kästen

Bitte beachten Sie die allgemeinen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS2223/` .

**Aufgabe 5.1** (4 Punkte)

Sei $\mathbb{F}_3 = \{0,1,2\}$ der Körper mit drei Element und sei $V = \mathbb{F}_3^4$ der Standardvektorraum aller Vektoren der Länge 4 über $\mathbb{F}_3$. Überprüfen Sie für jede der folgenden Teilmengen jeweils, ob diese einen Untervektorraum von $V$ bildet, und begründen Sie Ihre Antwort.

$$U_1 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in V \mid x_1 - x_2 = x_3 + x_4\}, \quad U_2 = \{(x, x+y, -x, -x-y) \mid x,y \in \mathbb{F}_3\},$$
$$U_3 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in V \mid x_1 + x_2x_3x_4 = 0\}, \quad U_4 = \{(x, x+y, 0, y+y^3) \mid x,y \in \mathbb{F}_3\},$$

*Hinweis.* In $\mathbb{F}_3$ ist Addition und Multiplikation durch das Rechnen modulo 3 gegeben.

**Aufgabe 5.2** (4 Punkte)

Sei $V$ ein Vektorraum über einem Körper $K$, mit Untervektorräumen $W_1, W_2$. Zeigen Sie: $W_1 \cup W_2$ ist ein Untervektorraum von $V$ genau dann, wenn $W_1 \subseteq W_2$ oder $W_2 \subseteq W_1$ gilt.

**Aufgabe 5.3** (4 Punkte)

Sei $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.
Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen Unterräume von $V$ bilden:

$$U = \{f \in V \mid f(x) = f(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\},$$
$$W = \{g \in V \mid g(x) = -g(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}.$$

Zeigen Sie ferner: $U \cap W = \{0\}$ und $U + W = V$.

*Hinweis.* Zu einer Abbildung $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ betrachten Sie die folgenden Abbildungen

$$h_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \tfrac{h(x)+h(-x)}{2} \quad \text{und} \quad h_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \tfrac{h(x)-h(-x)}{2}.$$

**Aufgabe 5.4** (4 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Vektoren des reellen Standardvektorraums $V = \mathbb{R}^4$:

$$v_1 = (1,1,1,1),\ v_2 = (4,4,0,0),\ v_3 = (3,4,2,1),\ v_4 = (2,3,1,1),\ v_5 = (1,0,0,0).$$

(a) Stellen Sie einen der Vektoren $v_1, \dots, v_5$ als Linearkombination von bereits drei der übrigen dar. Zeigen Sie andererseits, dass sich ein anderer der Vektoren $v_1, \dots, v_5$ gar nicht als Linearkombination der übrigen vier darstellen lässt.

(b) Zeigen Sie, dass $\langle v_1 \rangle \cup \langle v_2 \rangle$ kein Untervektorraum von $V$ ist, wohingegen $\langle v_1, v_4, v_5 \rangle \cup \langle v_2 \rangle$ sehr wohl ein Untervektorraum von $V$ ist.

Die nachfolgende Aufgabe brauchen Sie *nicht* schriftlich zu bearbeiten; es handelt sich um eine Aufgabe, die eine Verbindung zur Analysis illustriert.

**Aufgabe 5.5**

Eine reelle Folge ist eine Abbildung $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$; gewöhnlich notiert man sie als $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $x_n = x(n)$ gilt. Die Folge $x$ heißt beschränkt, falls gilt: $\exists B \in \mathbb{R}\, \forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq B$. Die Folge $x$ heißt eine Nullfolge, falls gilt: $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}_{\geq n_0} : |x_n| < \varepsilon$.
Zeigen Sie, dass

$$U_1 = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid x \text{ ist beschränkt}\} \quad \text{und} \quad U_2 = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid x \text{ ist eine Nullfolge}\}$$

Untervektorräume des Vektorraums $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$ sind.

*Bemerkung.* Der Raum $U_1$ spielt eine grundlegende Rolle in der Funktionalanalysis; ausgestattet mit der sogenannten Supremumsnorm wird er gewöhnlich mit $\ell^\infty$ bezeichnet. Der Raum $U_2$, mit der Supremumsnorm, wird oftmals mit $c_0$ bezeichnet.