Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2022/23

Lineare Algebra I – Blatt 6

Abgabe der schriftlichen Lösungen zu Aufgaben 6.1, 6.2, 6.3 und 6.4 bis Mittwoch, den 23.11.2022, 10.15 Uhr in den dafür vorgesehenen Kästen

Bitte beachten Sie die allgemeinen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS2223/` .

Aufgabe 6.1 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass sich jeder Vektor $b = (b_1, b_2, b_3)$ des Standardvektorraumes $\mathbb{Q}^3$ als Linearkombination der Vektoren $(2,0,4)$, $(5,0,3)$, $(1,6,0)$ darstellen lässt.

(b) Man betrachte $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass sich in diesem Vektorraum $\sqrt{3}$ nicht als Linearkombination der Elemente 1, $\sqrt{2}$ darstellen lässt.

Hinweis. Sie dürfen für (b) als bekannt voraussetzen, dass $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ nicht in $\mathbb{Q}$ liegen.

Aufgabe 6.2 (4 Punkte)

Sei $\mathbb{F}_2$ der Körper mit zwei Elementen, und sei

$$M = \{(1,0,1,0,1), (0,0,1,0,1), (0,0,0,1,0), (1,0,1,1,1), (1,0,0,1,0)\} \subseteq \mathbb{F}_2^5.$$

Beschreiben Sie $W = \langle M \rangle \subseteq \mathbb{F}_2^5$, indem Sie eine Teilmenge $B \subseteq M$ bestimmen, die eine Basis für diesen Untervektorraum des Standardvektorraums $\mathbb{F}_2^5$ bildet.

Aufgabe 6.3 (4 Punkte)

Im reellen Standardvektorraum $\mathbb{R}^4$ seien die vier Standardeinheitsvektoren

$$e_1 = (1,0,0,0), \quad e_2 = (0,1,0,0), \quad e_3 = (0,0,1,0), \quad e_4 = (0,0,0,1)$$

sowie die beiden weiteren Vektoren

$$x = (1,1,1,1) \quad \text{und} \quad y = (1,2,3,4)$$

gegeben. Bestimmen Sie eine Basis für den Untervektorraum

$$U = \langle x, y \rangle \cap \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Aufgabe 6.4 (4 Punkte)

Die Teilmenge $M = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}^3$ bestehe aus den Vektoren

$$v_1 = (1,2,0), \quad v_2 = (0,1,3), \quad v_3 = (1,0,0), \quad v_4 = (2,5,1).$$

(a) Zeigen Sie, dass M eine linear abhängige Teilmenge von $\mathbb{Q}^3$ ist, indem Sie eine geeignete nicht-triviale Darstellung der Null bestimmen.

(b) Zeigen Sie, dass M ein Erzeugendensystem von $\mathbb{Q}^3$ ist.

(c) Bestimmen Sie eine Teilmenge von M, die eine Basis von $\mathbb{Q}^3$ ist.