Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2022/23

Lineare Algebra I – Blatt 7

Abgabe der schriftlichen Lösungen zu Aufgaben 7.1, 7.2, 7.3 und 7.4 bis Mittwoch, den 30.11.2022, 10.15 Uhr in den dafür vorgesehenen Kästen

Bitte beachten Sie die allgemeinen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS2223/` .

Aufgabe 7.1 (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wie üblich bezeichnen wir mit $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ die Standardeinheitsvektoren in dem reellen Vektorraum $\mathbb{R}^n$. Gegeben seien zwei Indexmengen $I_1, I_2 \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Wir betrachten die Untervektorräume

$$W_1 = \langle \{e_i \mid i \in I_1\} \rangle \quad \text{und} \quad W_2 = \langle \{e_i \mid i \in I_2\} \rangle.$$

Finden Sie $W_1 \cap W_2$ und $W_1 + W_2$, indem Sie für beide Räume jeweils eine Basis in Abhängigkeit von I_1, I_2 bestimmen.

Aufgabe 7.2 (4 Punkte)

Überprüfen Sie die folgenden Relationen $\varrho \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ jeweils auf Reflexivität (bzgl. $\mathbb{N}_0$), Anti-Symmetrie und Transitivität:

(a) $\varrho = \{(m, n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid \exists k \in \mathbb{N}_0 : m - n = k^2\}$,

(b) $\varrho = \{(m, n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid \exists k \in \mathbb{N}_0 : m - n = 5k\}$,

(c) $\varrho = \{(m, n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid \exists p \in \mathbb{P}_{>2} : (m, n) = (p, p^2)\}$,

(d) $\varrho = \{(m, n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid m = n \text{ oder } (m, n) = (2, 3)\}$.

Aufgabe 7.3 (4 Punkte)

Sei K ein Körper. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, und $a_{ij}, b_i \in K$ für $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{$*$}$$

und definieren dazu Spaltenvektoren $v_1, \ldots, v_n$ und b wie folgt:

$$v_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in K^m \quad \text{für } i \in \{1, \ldots, n\} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m.$$

Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Das Gleichungssystem $(*)$ ist lösbar.

(ii) $\operatorname{Rang}(v_1, \ldots, v_n) = \operatorname{Rang}(v_1, \ldots, v_n, b)$.

Bitte wenden!

Aufgabe 7.4 (4 Punkte)

Berechnen Sie über dem Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen den Zeilenrang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 & 9 \\ -2 & 6 & -6 & 16 & 24 \\ -3 & 9 & -6 & -6 & -3 \\ 3 & -9 & 4 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

unter Verwendung der in der Vorlesung beschriebenen Methode.

Bemerkung. Der Zeilenrang von A ist nach Abschnitt 9 der Vorlesung gleich dem Rang des Vektorsystems (v_1, v_2, v_3, v_4) in $\mathbb{Q}^5$, wobei v_i denjenigen Vektor bezeichnet, dessen Koordinaten bzgl. der Standardbasis in der $i$ten Zeile von A kodiert sind.

Die nachfolgenden Aufgaben brauchen Sie *nicht* schriftlich zu bearbeiten; es handelt sich um ein zusätzliches Übungsangebot, um Inhalte der Vorlesung zu vertiefen.

Aufgabe 7.5

(a) Entscheiden Sie (mit Begründung!), ob folgendes Gleichungssystem über $\mathbb{Q}$ lösbar ist:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -1, \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & = & 1, \\ 7x_1 & + & 8x_2 & + & 9x_3 & = & -1. \end{array} \qquad (**)$$

Entscheiden Sie auch, ob das Gleichungssystem $(**)$ über $\mathbb{R}$ lösbar ist, und begründen Sie knapp Ihre Antwort.

(b) Überlegen Sie allgemein. Seien $K \subseteq L$ Körper dergestalt, dass die Addition und Multiplikation auf K durch Einschränkung der entsprechenden Verknüpfungen auf L gegeben sind. In wie weit hängt die Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems über K wie $(*)$ in Aufgabe 7.3 davon ab, ob man Lösungen mit Koordinaten in K oder in L sucht?

Aufgabe 7.6

Betrachten Sie die nachstehende Folge von Vektoren des $\mathbb{R}$-Vektorraums $V = \mathbb{R}^2$:

$$v_1 = (1,2), \quad v_2 = (3,4), \quad v_3 = (5,6), \quad \ldots, \quad v_n = (2n-1, 2n), \quad \ldots$$

(a) Schreiben Sie, für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \neq n$, die Vektoren $(1,2)$ und $(1,0)$ explizit als Linearkombinationen von v_m und v_n.

(b) Zeigen Sie: Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \neq n$ ist $\{v_m, v_n\}$ ein Erzeugendensystem von V.

(c) Beweisen Sie, dass für paarweise verschiedene $l, m, n \in \mathbb{N}$ die Menge $\{v_m, v_n\}$ linear unabhängig und die Menge $\{v_l, v_m, v_n\}$ linear abhängig ist.

(d) Bestimmen Sie alle linear unabhängigen Teilmengen der Menge $\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Aufgabe 7.7

Sei $M = \{\log p \mid p \text{ Primzahl}\}$. Entscheiden Sie, ob M eine linear abhängige oder linear unabhängige Teilmenge des $\mathbb{Q}$-Vektorraumes $\mathbb{R}$ ist.

Bemerkung. Hierbei bezeichnet $\log\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ die natürliche Logarithmusfunktion, d.h. die Umkehrabbildung von der Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, $x \mapsto \exp(x) = e^x$.