Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2022/23

Lineare Algebra I – Blatt 8

Abgabe der schriftlichen Lösungen zu Aufgaben 8.1, 8.2, 8.3 und 8.4 bis Mittwoch, den 07.12.2022, 10.15 Uhr in den dafür vorgesehenen Kästen

Bitte beachten Sie die allgemeinen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS2223/` .

Aufgabe 8.1 (4 Punkte)

Betrachten Sie im reellen Standardvektorraum $\mathbb{R}^4$ die Untervektorräume

$$U = \langle (1,0,2,-1),(0,1,3,1) \rangle \quad \text{und} \quad W = \langle (1,1,-1,2),(0,1,9,-1) \rangle.$$

Bestimmen Sie $U + W$ und $U \cap W$, indem Sie jeweils eine Basis berechnen.

Hinweis. Um eine Basis für einen Untervektorraum zu bestimmen, kann es hilfreich sein, zunächst dessen Dimension zu berechnen.

Aufgabe 8.2 (4 Punkte)

Sei R ein *boolescher Ring*, d. h. ein Ring mit Eins, in dem $a^2 = a$ für alle $a \in R$ gilt.

(a) Zeigen Sie, daß für alle $a \in R$ gilt: $a + a = 0$.

(b) Zeigen Sie, daß R kommutativ ist.

(c) Zeigen Sie, daß jedes Element von $R \setminus \{1\}$ ein Nullteiler ist.

Bemerkung. Boolesche Ringe wurden bereits im 19ten Jahrhundert von G. Boole systematisch untersucht und spielen eine Rolle, zum Beispiel, bei der Entwicklung von elektronischen Schaltnetzen.

Aufgabe 8.3 (4 Punkte)

Seien R, S Ringe.

(a) Erläutern Sie, warum $R \times S$ mit den koordinatenweise definierten Verknüpfungen

$$\begin{aligned} +\colon (R \times S) \times (R \times S) \to R \times S, &\quad (r_1, s_1) + (r_2, s_2) = (r_1 + r_2, s_1 + s_2), \\ \cdot\colon (R \times S) \times (R \times S) \to R \times S, &\quad (r_1, s_1)(r_2, s_2) = (r_1 r_2, s_1 s_2) \end{aligned}$$

einen Ring bildet.

(b) Zeigen Sie: $R \times S$ ist kommutativ genau dann, wenn R und S beide kommutativ sind.

(c) Zeigen Sie: $R \times S$ besitzt ein Einselement genau dann, wenn R und S beide ein Einselement haben.

Aufgabe 8.4 (4 Punkte)

Sei A eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A. Zeigen Sie: Je zwei Äquivalenzklassen bzgl. $\sim$ sind entweder gleich oder disjunkt, d. h., haben leeren Schnitt.

Bemerkung. Folglich ist A die disjunkte Vereinigung aller Äquivalenzklassen bzgl. $\sim$. Man sagt, die Äquivalenzklassen bilden eine *Partition* von A.

Bitte wenden!

Die nachfolgenden Aufgaben brauchen Sie *nicht* schriftlich zu bearbeiten; es handelt sich um ein zusätzliches Übungsangebot, um Inhalte der Vorlesung zu vertiefen.

Aufgabe 8.5

Berechnen Sie über $\mathbb{F}_{17}$, dem endlichen Körper mit 17 Elementen, den Zeilenrang von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 & 9 \\ -2 & 6 & -6 & 16 & 24 \\ -3 & 9 & -6 & -6 & -3 \\ 3 & -9 & 4 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

unter Verwendung der in der Vorlesung beschriebenen Methode.
Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit demjenigen zu Aufgabe 7.4, in der die entsprechende Matrix über dem Körper $\mathbb{Q}$ untersucht wurde.

Hinweis. Eine Konstruktionsmöglichkeit für endliche Körper, deren Anzahl von Elementen eine Primzahl ist, wurde bereits in Abschnitt 4 der Vorlesung besprochen. Konkret kann $\mathbb{F}_{17}$ als $R_{17}(\mathbb{Z}) = \{0, 1, \dots, 16\}$ realisiert werden, wobei modulo 17 zu rechnen ist. Zum Beispiel gelten in $R_{17}(\mathbb{Z})$ also: $11 + 8 = 2$ und $3 \cdot 7 = 4$. Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat in $R_{17}(\mathbb{Z})$ die Lösungen $x \in \{4, 13\}$; etc. Sie können leicht überprüfen, daß jedes von 0 verschiedene Element in $R_{17}(\mathbb{Z})$ ein multiplikativ inverses Element besitzt und parallel eine hilfreiche Inversen-Tabelle für die Bearbeitung der Aufgabe herstellen.

Bemerkung. In Abschnitt 11 der Vorlesung lernen wir den Restklassenring $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ kennen, der im wesentlichen eine konzeptionellere Kopie von $R_{17}(\mathbb{Z})$ darstellt. Weiter ist bekannt, daß es zu jeder Primzahl p im wesentlichen nur einen Körper mit p Elementen gibt; daher spricht man von *dem* Körper $\mathbb{F}_p$ mit p Elementen.

Aufgabe 8.6

Sei X eine Menge und $R = \mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X. Erklären Sie für Elemente $a, b \in R$ die Summe $a + b =_{\text{def}} a \triangle b$ über die symmetrische Differenz (vergleiche Aufgabe 3.3) und das Produkt $a \cdot b =_{\text{def}} a \cap b$ über den Durchschnitt der beteiligten Mengen.

(a) Erstellen Sie für $X = \{1, 2, 3\}$ explizite Additions- und Multiplikationstabellen für das Verknüpfungsgebilde $(R, +, \cdot)$. Bezeichnen Sie die Elemente von R dabei wie folgt:

$$n = \varnothing,\ a_1 = \{1\},\ a_2 = \{2\},\ a_3 = \{3\},\ b_1 = \{2,3\},\ b_2 = \{1,3\},\ b_3 = \{1,2\},\ e = \{1,2,3\}.$$

(b) Verifizieren Sie ganz allgemein, daß $(R, +, \cdot)$ einen booleschen Ring darstellt.

(c) Klären Sie, unter welchen Bedingungen an X der Ring $(R, +, \cdot)$ einen Körper bildet.

Hinweis. Verwenden Sie die Aussagen in Aufgabe 3.3, ohne erneuten Nachweis.

Bemerkung. Der sogenannte Darstellungssatz von M. H. Stone (1936) besagt, daß alle booleschen Ringe im wesentlichen auf strukturierte Weise schon als Teilringe von Ringen $(R, +, \cdot)$ der in der Aufgabe besprochenen Gestalt gewonnen werden.