Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2022/23

Lineare Algebra I – Blatt 9

Abgabe der schriftlichen Lösungen zu Aufgaben 9.1, 9.2, 9.3 und 9.4 bis Mittwoch, den 14.12.2022, 10.15 Uhr in den dafür vorgesehenen Kästen

Bitte beachten Sie die allgemeinen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS2223/` .

Durchweg auf dem gesamten Übungsblatt bezeichne K einen Körper. Für $m, n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathrm{Mat}_{m,n}(K)$ die Menge aller $m \times n$-Matrizen mit Einträgen in K.

• Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$ hat *Zeilenstufenform*, falls sie folgende Bedingungen erfüllt:

(ZSF1) Ist eine Zeile von A von Null verschieden, so ist der (von links nach rechts gelesen) erste von 0 verschiedene Eintrag in dieser Zeile gleich 1. Die Position dieses Eintrags heißt dann *Angelpunkt* der Zeile.

(ZSF2) Von Null verschiedene Zeilen liegen allesamt oberhalb von Nullzeilen. Sind die $i$te und $j$te Zeile von Null verschieden und $i < j$, dann erscheint der Angelpunkt der $j$ten Zeile in einer Spalte rechts von der des Angelpunktes der $i$ten Zeile.

Die Matrix A befindet sich in *reduzierter Zeilenstufenform*, falls zusätzlich gilt:

(ZSF3) Alle Einträge einer Spalte, in der ein Angelpunkt liegt, sind, bis auf den Eintrag 1 im Angelpunkt selbst, gleich 0.

• Eine *Lösung* des durch Angabe von

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K) \qquad \text{und} \qquad b = (b_i)_{1 \le i \le m} \in \mathrm{Mat}_{m,1}(K)$$

spezifizierten linearen Gleichungssystems[1]

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}, \qquad (*)$$

ist ein Tupel $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$, für welches die gegebenen Gleichungen $(*)$ erfüllt sind.
Das LGS heißt *homogen*, falls $b = 0$, d. h. $b_1 = \dots = b_m = 0$, gilt; andernfalls heißt das LGS *inhomogen*. Das dem LGS *zugeordnete homogene Gleichungssystem* ist das homogene LGS, welches sich ergibt, indem $b_1, \dots, b_m$ allesamt durch 0 ersetzt werden.
Die Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$ heißt die dem LGS zugeordnete *Koeffizientenmatrix*; die Matrix $(A \mid b) \in \mathrm{Mat}_{m,n+1}(K)$, die sich durch Ergänzen einer weiteren Spalte mit den b entsprechenden Einträgen ergibt, ist die zugeordnete *erweiterte Koeffizientenmatrix*.

• Ein *affiner Unterraum* eines K-Vektorraums V ist eine Teilmenge $T \subseteq V$ mit der Eigenschaft, daß $\{w - v \mid v, w \in T\}$ einen Untervektorraum von V bildet; die *Dimension* von T ist die Dimension dieses Untervektorraums.

Bitte wenden!

[1]Im folgenden kürzen wir „lineares Gleichungssystem“ durch „LGS“ ab.

Aufgabe 9.1 (4 Punkte)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$, und betrachten Sie das LGS mit erweiterter Koeffizientenmatrix $(A \mid b)$, für $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$ und $b \in \mathrm{Mat}_{m,1}(K)$. Verifizieren Sie:

(a) Ist die Lösungsmenge $L \subseteq K^n$ des LGS mit erweiterter Koeffizientenmatrix $(A \mid b)$ nicht leer, so ist L ein affiner Unterraum des Standardvektorraums K^n. Weiter ist $L_0 = \{y - x \mid x, y \in L\}$ dann die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen LGS, und für jede beliebige spezielle Lösung $x \in L$ gilt: $L = \{x + u \mid u \in L_0\}$.

(b) Geht $(A' \mid b')$ aus $(A \mid b)$ durch Anwendung von endlich vielen elementaren Zeilenumformungen hervor, so haben die beiden LGS mit erweiterten Koeffizientenmatrizen $(A \mid b)$ bzw. $(A' \mid b')$ dieselbe Lösungsmenge $L = L' \subseteq K^n$.

Aufgabe 9.2 (4 Punkte)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie per Induktion nach m: Jede Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$ läßt sich durch eine geeignete Anwendung von endlich vielen elementaren Zeilenumformungen in eine Matrix $A' \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$ überführen, die reduzierte Zeilenstufenform besitzt.

Aufgabe 9.3 (4 Punkte)

Seien $m, n \in \mathbb{N}$, und sei $L \subseteq K^n$ die Lösungsmenge des LGS mit erweiterter Koeffizientenmatrix $(A \mid b)$, für $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$ und $b \in \mathrm{Mat}_{m,1}(K)$. Weiter besitze $(A \mid b)$ reduzierte Zeilenstufenform. Zeigen Sie:

(a) Liegt in der letzten Spalte von $(A \mid b)$ ein Angelpunkt, so ist L leer.

(b) Liegt in der letzten Spalte von $(A \mid b)$ kein Angelpunkt und ist r die Anzahl der Angelpunkte in $(A \mid b)$, so gilt $0 \le r \le n$ und $L \subseteq K^n$ ist ein affiner Unterraum der Dimension $n - r$. Insbesondere ist $L \neq \varnothing$.

Hinweis. Für (b) seien $1 \le j_1 < \ldots < j_r \le n$ die Spaltenindizes der verschiedenen Angelpunkte und $J = \{j_1, \ldots, j_r\}$. Erklären Sie, wieso es zu jeder Wahl von $x_i \in K$ für $i \in \{1, \ldots, n\} \smallsetminus J$ genau eine Wahl von $x_j \in K$ für $j \in J$ gibt, so daß $(x_1, \ldots, x_n)$ eine Lösung des LGS ist. Folgern Sie $L \neq \varnothing$ und wenden Sie Aufgabe 9.1(a) an. Geben Sie eine Basis für den Lösungsraum L_0 des zugehörigen homogenen LGS an.

Aufgabe 9.4 (4 Punkte)

Lösen Sie jedes der drei folgenden LGS über dem Körper $K = \mathbb{Q}$, indem Sie jeweils die erweiterte Koeffizientenmatrix durch geeignete Elementarumformungen auf reduzierte Zeilenstufenform bringen. Geben Sie sodann die jeweilige Lösungsmenge $L \subseteq \mathbb{Q}^3$, sofern sie nicht leer ist, explizit in der Form $L = v + \langle B \rangle$ an, wobei eine spezielle Lösung v und eine Basis B für den Lösungsraum des zugehörigen homogenen LGS zu bestimmen sind.

$$(\dagger)\quad \begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 10 \\ 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ 8x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & = & 5 \end{array}, \qquad (\ddagger)\quad \begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & = & 7 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\ 5x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 2 \end{array},$$

$$(\S)\quad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 3 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 7 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \end{array}.$$

Bitte wenden!

Die nachfolgende Aufgabe, eine Klausuraufgabe aus dem letzten SoSe, brauchen Sie *nicht* schriftlich zu bearbeiten; es handelt sich um ein zusätzliches Übungsangebot, um Inhalte der Vorlesung zu vertiefen.

Aufgabe 9.5

(a) Bringen Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 5 & -2 \\ x & y & z & w \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{Q}),$$

wobei $x, y, z, w \in \mathbb{Q}$ Parameter darstellen, durch eine Kette geeigneter und anzugebender Elementarumformungen auf Zeilenstufenform.

(b) Welche Dimension besitzt der Untervektorraum

$$U = \langle (1, -2, 3, 0), (1, -1, 4, -1), (1, 0, 5, -2) \rangle$$

des Standardvektorraums $\mathbb{Q}^4$? Begründen Sie knapp Ihre Antwort.

(c) Geben Sie ein homogenes lineares Gleichungssystem mit kleinstmöglicher Anzahl an Gleichungen in den Variablen x, y, z, w an, dessen rationale Lösungen $(x, y, z, w) \in \mathbb{Q}^4$ gerade den Elementen des Untervektorraums U in (b) entsprechen.