Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2022/23

Lineare Algebra I – Blatt 12

Abgabe der schriftlichen Lösungen zu Aufgaben 12.1, 12.2, 12.3 und 12.4 bis Mittwoch, den 18.01.2023, 10.15 Uhr in den dafür vorgesehenen Kästen

Bitte beachten Sie die allgemeinen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS2223/` .

Durchweg bezeichne K einen Körper. Weiter seien $m, n \in \mathbb{N}$.

Für $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$ und $a \in K$ bezeichne $E_{ij}(a) \in \mathrm{Mat}_n(K)$ die Matrix, die sich von der Einheitsmatrix dadurch unterscheide, daß sie an der Stelle (i, j) den Eintrag a habe. Solche Matrizen heißen *Elementarmatrizen*. Ferner bezeichne $T_{ij} \in \mathrm{Mat}_n(K)$ die Matrix, welche sich von der Einheitsmatrix dadurch unterscheide, daß an den Stellen $(i, i), (j, j)$ Einträge 0 und an den Stellen $(i, j), (j, i)$ Einträge 1 stehen. Schließlich, für $i \in \{1, \dots, n\}$ und $a \in K^\times$, bezeichne $D_i(a)$ die Matrix, welche sich von der Einheitsmatrix dadurch unterscheide, daß an der Stelle (i, i) der Eintrag a stehe.

Die Begriffe der Zeilenstufenform und reduzierten Zeilenstufenform einer Matrix wurden auf Blatt 9 eingeführt.

Aufgabe 12.1 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Die $n \times n$ Matrizen $E_{ij}(a)$ für $i \neq j$ und $a \in K$, T_{ij} für $i \neq j$ und $D_i(a)$ für $a \in K^\times$ sind invertierbar, d.h. Elemente der allgemeinen linearen Gruppe $\mathrm{GL}_n(K)$.

(b) Die Teilmenge

$$\mathrm{SL}_n(K) = \{E_1 E_2 \cdots E_r \mid r \in \mathbb{N}_0 \text{ und } E_1, \dots, E_r \in \mathrm{GL}_n(K) \text{ beliebige Elementarmatrizen}\}$$

bildet eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(K)$.

(c) Die Menge aller Matrizen der Form $D_1(a_1) D_2(a_2) \cdots D_n(a_n)$ mit $a_1, \dots, a_n \in K^\times$ bildet ebenfalls eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(K)$.

Bemerkung. Die Gruppe $\mathrm{SL}_n(K)$ heißt die *spezielle lineare Gruppe* vom Grad n über K. Die Matrizen in (c) bilden die *Gruppe der invertierbaren Diagonalmatrizen*.

Aufgabe 12.2 (4 Punkte)

(a) Sei $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$. Geben Sie an, wie sich elementare Zeilen- und Spaltenumformungen für die Matrix A mit Hilfe der Multiplikation mit Matrizen der Form $E_{ij}(a)$, T_{ij}, $D_i(a)$ aus $\mathrm{Mat}_m(K)$ bzw. $\mathrm{Mat}_n(K)$ von links bzw. von rechts bewerkstelligen lassen.

(b) Folgern Sie mit Hilfe der Aufgabe 9.2: Zu jeder Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$ gibt es ein $B \in \mathrm{GL}_m(K)$, so daß BA reduzierte Zeilenstufenform besitzt.

(c) Zeigen Sie: Jede invertierbare Matrix $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ läßt sich als Produkt

$$A = \underbrace{E_1 E_2 \cdots E_r}_{\in \mathrm{SL}_n(K)} \cdot \underbrace{D_1(a_1) D_2(a_2) \cdots D_n(a_n)}_{\text{invertierb. Diagonalmatrix}}$$

von Elementarmatrizen und einer invertierbaren Diagonalmatrix schreiben.

Bitte wenden!

Aufgabe 12.3 (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Erläutern Sie, warum folgendes Verfahren zur Überprüfung der Invertierbarkeit von A und ggf. zu der Bestimmung der inversen Matrix A^{-1} führt.

Man modifiziere A durch Hintereinanderausführung elementarer Zeilenumformungen, mit dem Ziel, A in die Einheitsmatrix zu transformieren. Entsteht dabei eine Nullzeile, so ist A nicht invertierbar. Erreicht man die Einheitsmatrix, so ist A invertierbar und die gleichen Zeilenumformungen in derselben Reihenfolge angewandt auf die Einheitsmatrix liefern die inverse Matrix A^{-1}.

Aufgabe 12.4 (4 Punkte)

(a) Wenden Sie das in Aufgabe 12.3 beschriebene Verfahren auf die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q})$$

an, um zu zeigen, dass A invertierbar ist und um die inverse Matrix zu berechnen.

(b) Fassen Sie A nun als Matrix $\overline{A}$ über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_p$ für eine Primzahl p auf. Für welche $p \in \mathbb{P}$ ist $\overline{A}$ invertierbar in $\mathrm{Mat}_3(\mathbb{F}_p)$?