Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2022/23

Lineare Algebra I – Blatt 15

Auf diesem ergänzenden Blatt finden Sie Übungsaufgaben zu den zuletzt in der Vorlesung behandelten Themen, damit Sie auch diese vertiefen und einüben können. Abgaben werden nicht entgegengenommen; die Aufgaben dienen der Selbstkontrolle.

Bitte beachten Sie die allgemeinen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS2223/` .

Aufgabe 15.1

Sei V ein euklidischer Vektorraum, mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und euklidischer Norm $\|\cdot\|$.

(a) Zeigen Sie, daß für $v, w \in V$ die folgenden Gleichungen, der „Satz von Pythagoras“ und die „Parallelogrammgleichung“, gelten:

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle \quad \text{und} \quad \|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2).$$

(b) Beschreiben Sie in Worten, welche geometrische Interpretation die beiden Gleichungen in (a) für den Standardraum $\mathbb{R}^2$, also in der euklidischen Ebene, haben.

Aufgabe 15.2

Sei $n \geq 2$, und $V = \mathbb{R}^n$ der Standardvektorraum. Die *Maximumsnorm* ist definiert durch

$$\|\cdot\|_\infty : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \|x\|_\infty = \max\{|x_i| \mid 1 \leq i \leq n\}.$$

(a) Zeigen Sie: $\|\cdot\|$ ist eine Norm auf V, d.h.

- $\forall v \in V \smallsetminus \{0\} : \|v\|_\infty > 0$,
- $\forall a \in \mathbb{R}\ \forall v \in V : \|av\|_\infty = |a|\,\|v\|_\infty$ und
- $\forall v, w \in V : \|v + w\|_\infty \leq \|v\|_\infty + \|w\|_\infty$.

(b) Beweisen Sie: Es gibt *kein* Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V, welches die Maximumsnorm mittels $\|v\|_\infty = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ für $v \in V$ induziert.

Aufgabe 15.3

Bestimmen Sie mithilfe des Gram–Schmidt-Verfahrens für die Vektoren

$$v_1 = (1, 1, 1, 1), \quad v_2 = (-1, 4, 4, -1), \quad v_3 = (4, -2, 2, 0) \in \mathbb{R}^4$$

eine Orthonormalbasis der linearen Hülle $U = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ im Standardvektorraum $V = \mathbb{R}^4$, ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt. Berechnen Sie zudem eine Basis für das orthogonale Komplement $U^\perp$ zu U in V.

Bitte wenden!

Bei der nächsten Aufgabe handelt es sich um eine Klausuraufgabe aus dem letzten SoSe.

Aufgabe 15.4

Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$, ausgestattet mit der Abbildung

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \qquad \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \mathrm{Spur}(\mathbf{a}^{\mathrm{tr}}\, \mathbf{b}),$$

wobei $\mathbf{a}^{\mathrm{tr}}$ die Transponierte einer Matrix $\mathbf{a}$ bezeichnet und die Spur von $\mathbf{a} = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}\right)$ durch $\mathrm{Spur}(\mathbf{a}) = a_{11} + a_{22}$ erklärt ist.
Eine Matrix $\mathbf{a} \in V$ heißt symmetrisch, falls sie gleich ihrer Transponierten ist: $\mathbf{a} = \mathbf{a}^{\mathrm{tr}}$.

(a) Verifizieren Sie, daß V mittels $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein euklidischer Vektorraum ist.

(b) Bestimmen Sie eine explizite Abbildungsvorschrift für die induzierte euklidische Norm $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ in den Standardmatrixkoordinaten.

(c) Verifizieren Sie, daß

$$\mathbf{e}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis für den euklidischen Vektorraum V bilden.

(d) Bestimmen Sie für den Untervektorraum U aller Diagonalmatrizen in V und für den Untervektorraum W aller symmetrischen Matrizen in V jeweils eine Basis für das orthogonale Komplement $U^{\perp}$ bzw. $W^{\perp}$ in V.

Aufgabe 15.5

Sei V ein euklidischer Vektorraum und $\alpha : V \to V$ ein orthogonaler Endomorphismus.

(a) Zeigen Sie: Der Endomorphismus α besitzt höchstens die Eigenwerte $1, -1$ in $\mathbb{R}$.

(b) Zeigen Sie: Ist $v \in V$ ein Eigenvektor von α, so bildet α den Untervektorraum $\langle v \rangle^{\perp}$ in sich ab, d. h., für $w \in V$ mit $\langle v, w \rangle = 0$ gilt stets $\langle v, w\alpha \rangle = 0$.

(c) Zeigen Sie: Zerfällt das charakteristische Polynom $f = \mathrm{Charpol}(\alpha)$ über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren, so exisitiert eine Orthonormalbasis für V, die aus Eigenvektoren von α besteht.

Hinweis. Argumentieren Sie per Induktion nach $\dim V$ und verwenden Sie (b).

(d) Formulieren Sie das Ergebnis aus (c) als eine Aussage über Matrizen, indem Sie geeignet zu Koordinatenmatrizen übergehen.

(e) Geben Sie eine geometrische Beschreibung aller orthogonalen Endomorphismen des Standardvektorraums $\mathbb{R}^3$, ausgestattet mit dem Standardskalarprodukt, deren charakteristisches Polynom über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren zerfällt. Benennen Sie explizit wenigstens einen orthogonalen Endomorphismus, der nicht von dieser Form ist.

Vielen Dank für Ihr Engagement im Rahmen dieser Veranstaltung!

⚽ 🚲 ☺☺ ☼ ✈

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei den anstehenden Prüfungen
und eine erholsame vorlesungsfreie Zeit.