Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Dr. Sofiya Yatsyna
Wintersemester 2026-27

Lineare Algebra I – Blatt 7

Abgabe der schriftlichen Lösungen zu Aufgaben 7.1, 7.2, 7.3 und 7.4 bis Mittwoch, den 02.12.2026, 10.30 Uhr in den dafür vorgesehenen Kästen

Bitte beachten Sie die allgemeinen Hinweise zur Bearbeitung und Abgabe auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LAI_WS2627/` .

Aufgabe 7.1 (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wie üblich bezeichnen wir mit $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ die Standardeinheitsvektoren in dem reellen Vektorraum $\mathbb{R}^n$. Gegeben seien zwei Indexmengen $I_1, I_2 \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Wir betrachten die Untervektorräume

$$W_1 = \langle \{e_i \mid i \in I_1\} \rangle \quad \text{und} \quad W_2 = \langle \{e_i \mid i \in I_2\} \rangle.$$

Finden Sie $W_1 \cap W_2$ und $W_1 + W_2$, indem Sie für beide Räume jeweils eine Basis in Abhängigkeit von I_1, I_2 bestimmen.

Aufgabe 7.2 (4 Punkte)

Überprüfen Sie die folgenden Relationen $\varrho \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ jeweils auf Reflexivität (bzgl. $\mathbb{N}_0$), Anti-Symmetrie und Transitivität:

(a) $\varrho = \{(m, n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid \exists k \in \mathbb{N}_0 : m - n = k^2\}$,

(b) $\varrho = \{(m, n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid \exists k \in \mathbb{N}_0 : m - n = 5k\}$,

(c) $\varrho = \{(m, n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid \exists p \in \mathbb{P}_{>2} : (m, n) = (p, p^2)\}$,

(d) $\varrho = \{(m, n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid m = n \text{ oder } (m, n) = (2, 3)\}$.

Aufgabe 7.3 (4 Punkte)

Sei K ein Körper. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, und $a_{ij}, b_i \in K$ für $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \qquad (*)$$

und definieren dazu Spaltenvektoren $v_1, \ldots, v_n$ und b wie folgt:

$$v_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \in K^m \quad \text{für } i \in \{1, \ldots, n\} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m.$$

Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Das Gleichungssystem $(*)$ ist lösbar.

(ii) $\mathrm{Rang}(v_1, \ldots, v_n) = \mathrm{Rang}(v_1, \ldots, v_n, b)$.

Bitte wenden!

Aufgabe 7.4 (4 Punkte)

Berechnen Sie über dem Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen den Zeilenrang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -1 & 9 \\ -2 & 6 & -6 & 16 & 24 \\ -3 & 9 & -6 & -6 & -3 \\ 3 & -9 & 4 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

unter Verwendung der in der Vorlesung beschriebenen Methode.

Bemerkung. Der Zeilenrang von A ist nach Abschnitt 9 der Vorlesung gleich dem Rang des Vektorsystems (v_1, v_2, v_3, v_4) in $\mathbb{Q}^5$, wobei v_i denjenigen Vektor bezeichnet, dessen Koordinaten bzgl. der Standardbasis in der $i$ten Zeile von A kodiert sind.