Modelltheorie II – Blatt 1

Abgabe am 29.4.2020 per Mail an Florian.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (2 Punkte):

Sei K ein Körper, und sei $|\cdot|_\infty\colon K(X) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definiert durch: $|0|_\infty = 0$ und $|\frac{f}{g}|_\infty = e^{\deg f - \deg g}$ für $f, g \in K[X] \setminus \{0\}$. Zeigen Sie, dass $|\cdot|_\infty$ ein Betrag auf $K(X)$ ist. Ist er archimedisch?

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Sei K ein Körper und sei $|\cdot|$ ein Betrag auf K. Zeigen Sie:

(a) Für jede reelle Zahl $0 \leq \lambda \leq 1$ ist auch $x \mapsto |x|^\lambda$ ein Betrag auf K.

(b) Ist $|\cdot|$ nicht-archimedisch, so ist allgemeiner für jedes reelle $\lambda \geq 0$ die Funktion $x \mapsto |x|^\lambda$ ein Betrag auf K.

(Bei dieser Aufgabe definieren wir $0^0 := 0$.)

Aufgabe 3 (2 Punkte):

Sei K ein Körper und sei $|\cdot|$ ein Betrag auf K. In anderen Kontexten wird „archimedisch" eigentlich eher wie folgt definiert:

($\star$) $|\cdot|$ ist archimedisch, wenn für alle $x, y \in K^\times$ eine natürliche Zahl $n \geq 1$ existiert, so dass $|\frac{1}{n}x| \leq |y| \leq |nx|$.

Zeigen Sie, dass diese Definition ($\star$) äquivalent zu der aus der Vorlesung ist – außer für den trivialen Betrag.

Aufgabe 4 (8 Punkte):

Sei K ein Körper und $|\cdot|$ ein nicht-archimedischer Betrag auf K. Zeigen Sie:

(a) Für $x, y \in K$ mit $|x| \neq |y|$ gilt: $|x + y| = \max\{|x|, |y|\}$.

(b) Ist $n \geq 2$ und sind $x_1, \ldots, x_n \in K$ mit $x_1 + \cdots + x_n = 0$, so wird das Maximum $\max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ für mindestens zwei verschiedene i angenommen.

(c) „Jedes Dreieck ist gleichschenklig": Für beliebige $x, y, z \in K$ gilt: Mindestens zwei der Beträge $|x - y|$, $|x - z|$ und $|y - z|$ sind gleich.

(d) „Jeder Punkt eines Balls ist Mittelpunkt des Balls": Sei $x \in K$, $r \in \mathbb{R}$ und sei $B := \{y \in K \mid |x - y| \leq r\}$ der Ball um x vom Radius r. Dann gilt für jedes $x' \in B$: $B = \{y \in K \mid |x' - y| \leq r\}$.