Modelltheorie II – Blatt 10

Abgabe am 1.7.2020 per Mail an Florian.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (2+1 Punkte):

Sei K ein Modell von $\mathrm{HEN}_{0,0}$ als L_{DP}-Struktur. Zeigen Sie:

(a) Jede definierbare Teilmenge $X \subset \bar{K}^n \times \Gamma^m$ lässt sich als disjunkte Vereinigung von endlich vielen Mengen der Form $Y_i \times Z_i$ schreiben, für $Y_i \subset \bar{K}^n$ und $Z_i \subset \Gamma^m$, wobei die X_i und Y_i mit den selben Parametern definierbar sind wie X.

(b) Definierbare Abbildungen von $\bar{K}^n$ nach Γ^m und von Γ^m nach $\bar{K}^n$ nehmen nur endlich viele Werte an.

Aufgabe 2 (3 Punkte):

In der Vorlesung wurden mit Hilfe von Quantorenelimination zwei verschiedene Versionen vom Satz von Ax-Kochen/Ershov gezeigt. Zeigen Sie, dass die zweite Version (Korollar 2.5.10) auch direkt aus der ersten (Korollar 2.5.9) folgt.

Hinweis: Unter der Annahme, dass 2.5.10 falsch ist, können Sie für eine geeignete unbeschränkte Primzahlmenge P die Theorien $T_1 := \bigcap_{p \in P} \mathrm{Th}(\mathbb{Q}_p)$ und $T_2 := \bigcap_{p \in P} \mathrm{Th}(\mathbb{F}_p((t)))$ vergleichen. (Betrachten Sie Modelle der Charakteristik $(0,0)$.)

Aufgabe 3 (3+3+2+2 Punkte):

Sei $L \supset L_{\mathrm{RV}}$ eine RV-Expansion und sei K eine L-Struktur, die (als L_{RV}-Struktur) ein Modell von $\mathrm{HEN}_{0,0}$ ist.

In dieser Aufgabe wollen wir überprüfen, dass der acl-Rang, den wir vor einem Jahr eingeführt hatten, sich in K gut verhält.

(a) Sei $X \subset K^2$ eine definierbare Menge, so dass für jedes $a \in K$ die Faser $X_a = \{b \in K \mid (a, b) \in K\}$ endich ist. Zeigen Sie: Es existiert ein Polynom $f \in K[x, y] \setminus \{0\}$, so dass X eine Teilmenge der Nullstellenmenge von f ist (d. h. es gilt $f(a, b) = 0$ für alle $(a, b) \in X$).
Hinweis: Wählen Sie eine VF-qf-Formel ϕ, die X definiert und betrachten Sie einen Punkt $(a, b) \in X$. Zeigen Sie, dass für mindestens eins der Polynome f_i, die in ϕ auftreten, $f_i(a, b) = 0$ gilt (da sonst für alle b' hinreichend nah an b gilt: $\mathrm{rv}(f_i(a, b)) = \mathrm{rv}(f_i(a, b'))$).

(b) Folgern Sie: In K hat acl die Austauscheigenschaft (Def. 5.3.5 im alten Skript) für Elemente der Sorte VF, d. h.: Sind $A \subset K$ und $b, c \in K$ mit $c \in \mathrm{acl}(A \cup \{b\}) \setminus \mathrm{acl}(A)$, so ist $b \in \mathrm{acl}(A \cup \{c\})$.
Hinweis: Dass $c \in \mathrm{acl}(A \cup \{b\})$ liegt, wird durch eine A-definierbare Teilmenge X bezeugt. Man kann sich überlegen, dass X ohne Einschränkung die Form aus (a) hat.

(c) Mit Hilfe der Austauscheigenschaft wurde der acl-Rang von definierbaren Mengen definiert (Def. 5.7.2 im alten Skript). Zeigen Sie, dass für definierbare $X \subset K^n$ gilt:
Der Rang von X ist n genau dann, wenn das Innere von X nicht-leer ist, d. h. wenn ein $(a_1, \dots, a_n) \in X$ existiert und ein $\lambda \in \Gamma$, so dass $B_{>\lambda}(a_1) \times \cdots \times B_{>\lambda}(a_n) \subset X$ ist.
Hinweis: Diese Bedigungen sind auch äquivalent dazu, dass X nicht Teilmenge der Nullstellenmenge eines Polynoms ist.

(d) Jetzt wollen wir noch sehen, dass der Rang definierbar ist (Satz 5.7.9 im alten Skript). Zeigen Sie dazu: $\mathrm{HEN}_{0,0}$ eliminiert $\exists^\infty$ (siehe Definition 5.7.6 im alten Skript).
Hinweis: Zeigen Sie unter Verwendung von Aufgabe 1 (c) von Blatt 8: Jede unendliche definierbare Teilmenge eines Modells K enthält einen Ball.