Modelltheorie II – Blatt 11

Abgabe am 8.7.2020 per Mail an Florian.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (2+1+2+2 Punkte):

Der Beweis von Bemerkung 3.1.3 war nicht sonderlich ausführlich („Kompaktheit"). In dieser Aufgabe sollen die Details davon ausgefüllt werden (d. h. die Aussage der Bemerkung soll aus Satz 3.1.2 hergeleitet werden).

(a) Zeigen Sie: Die Bedingung an f aus Satz 3.1.2 ist definierbar im folgenden Sinne:
Sind $\phi(\dots,\underline{a})$ und $\psi(\dots,\underline{a})$ Formeln, die eine Menge $X_{\underline{a}} \subset K^n \times \mathrm{RV}^m$ und eine Funktion $f_{\underline{a}}\colon K^n \to \mathrm{RV}^N$ definieren (für $\underline{a} \in K^r \times \mathrm{RV}^s$), so existiert eine Formel $\chi_{\phi,\psi}(\underline{x})$, so dass für jedes Modell $K \models \mathrm{HEN}_{0,0}$ und jedes $\underline{a} \in K^r \times \mathrm{RV}^s$ gilt: Die Bedingung aus dem Satz ist für $X_{\underline{a}}$ und $f_{\underline{a}}$ erfüllt genau dann, wenn $K \models \chi_{\phi,\psi}(\underline{a})$ gilt.

(b) Für jedes ϕ wie oben und jedes $K \models \mathrm{HEN}_{0,0}$ gilt: $\bigcup_\psi \chi_{\phi,\psi}(K) = K^r \times \mathrm{RV}^s$, wobei die Vereinigung über die Formeln ψ der obigen Form läuft.

(c) Für jedes ϕ wie oben existieren endlich viele Formeln $\psi_1,\dots,\psi_\ell$, so dass für jedes $K \models \mathrm{HEN}_{0,0}$ gilt: $\bigcup_{i=1}^{\ell} \chi_{\phi,\psi_i}(K) = K^r \times \mathrm{RV}^s$.

(d) Konstruieren Sie aus den Formeln ψ_i und χ_{ϕ,ψ_i} aus (c) eine Formel ψ, die Bemerkung 3.1.3 erfüllt.

Aufgabe 2 (2+2+3+2 Punkte):

Sei $L \supset L_{\mathrm{RV}}$ eine RV-Expansion und sei K eine L-Struktur, die (als L_{RV}-Struktur) ein Modell von $\mathrm{HEN}_{0,0}$ ist.

In dieser Aufgabe wollen wir eine „topologische" Charakterisierung des Rangs von definierbaren Mengen in K^n geben (vgl. Blatt 10, Aufgabe 3). In vielen Teilaufgaben wird dazu Satz 5.7.3 aus dem alten Skript verwendet.

(a) Zeigen Sie: Ist $f\colon \mathrm{RV}^N \to K$ definierbar, so ist das Bild von f endlich.
Hinweis: Sie können entweder direkt mit einer VF-qf-Formel argumentieren, die den Graph von f definiert, oder Sie können bei der Abbildung $g\colon (K^\times)^N \to K, a \mapsto f(\mathrm{rv}(a))$ den Rang der Fasern bestimmen.

In (b) und (c) sei $f\colon K^n \to \mathrm{RV}^N$ eine definierbare Abbildung, deren Fasern krumme Quader sind, und sei $X \subset K^n$ eine definierbare Teilmenge, die sich als (möglicherweise unendliche) Vereinigung von Fasern von f schreiben lässt.

(b) Sei $\ell \le n$ gegeben. Wir nehmen (in dieser Teilaufgabe) zusätzlich an, dass für alle Fasern Q von f, die in X liegen, folgendes gilt: Sind $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ die Radien von Q, so ist $\lambda_\ell = \infty$. Sei außerdem $\pi\colon K^n \to K^{n-1}$ die Projektion, die die ℓ-te Koordinate vergisst.
Zeigen Sie: Für alle $\underline{a} \in K^{n-1}$ ist $\pi^{-1}(\underline{a}) \cap X$ endlich.
Hinweis: Verwenden Sie (a).

(c) Ist Q ein krummer Quader mit Radien $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, so definieren wir $r(Q)$ als die Anzahl der $i \le n$, für die $\lambda_i \ne \infty$ gilt. Zeigen Sie: $\operatorname{rk} X = \max_Q r(Q)$, wobei das Maximum über all diejenigen Fasern von f läuft, die in X liegen.
Hinweis: Für „$\ge$" reicht es, für einen einzigen krummen Quader eine untere Abschätzung für den Rang zu finden. Für „$\le$": Zerlegen Sie X in (endlich viele) Teile danach, welche $\lambda_i = \infty$ sind. Für jedes Teil können Sie dann mit Hilfe von (b) eine obere Schranke für den Rang erhalten.

(d) Sei nun $Y \subset K^n$ eine beliebige definierbare Menge. Zeigen Sie: Der Rang von Y ist gleich dem maximalen d, für das eine Koordinaten-Projektion $\pi\colon K^n \to K^d$ existiert, so dass $\pi(Y)$ nicht-leeres inneres hat. („Koordinaten-Projektion" bedeutet: Abbildung der Form $(a_1 \dots, a_n) \mapsto (a_{i_1}, \dots a_{i_d})$, für $1 \le i_1 < \dots < i_d \le n$.)
Hinweis: Um π zu finden wählen Sie aus den Teilen im Hinweis zu (c) ein geeignetes aus. Um dann zu zeigen, dass $\pi(Y)$ nicht-leeres inneres hat ist Aufgabe 3 (c) vom vorigen Blatt nützlich.