Modelltheorie II – Blatt 2

Abgabe am 6.5.2020 per Mail an Florian.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (2 Punkte):

Sei $(K, |\cdot|)$ ein vollständiger Körper mit nicht-archimedischem Betrag (d. h. K soll vollständig bezüglich der von $|\cdot|$ induzierten Metrik sein.) Seien $a_i \in K$ für $i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergiert genau dann, wenn die Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe 2 (2 Punkte):

Bestimmen Sie $\frac{1}{3}$ als Element von $\mathbb{Q}_5$, d. h. schreiben Sie es in der Form $\sum_{i\geq N} r_i 5^i$ (mit $N \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq r_i < 5$).

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Zeigen Sie: Ein Element $\sum_{i\geq N} r_i p^i$ von $\mathbb{Q}_p$ ist rational genau dann, wenn es eventuell periodisch ist, d. h. wenn ein $N_0 \in \mathbb{Z}$ und ein $M \geq 1$ existiert, so dass $r_i = r_{i+M}$ für alle $i \geq N_0$ gilt.

Als Zwischenschritte ist es nützlich, die folgenden Aussagen zu zeigen:

- Ein Element $a \in \mathbb{Q}_p$ ist eventuell periodisch mit Peridodenlänge M genau dann, wenn $(1 - p^M)a$ in $\mathbb{Z}[p^{-1}] = \{ap^r \mid a, r \in \mathbb{Z}\}$ liegt.
- Ist q eine von p verschiedene Primzahl, so existiert ein $M \geq 1$, so dass $p^M - 1$ durch q teilbar ist. Genauer kann man M wählen als die Ordnung von $p + q\mathbb{Z}$ als Element der multiplikativen Gruppe $\mathbb{F}_q^\times$.

Aufgabe 4 (3 Punkte):

Schreiben Sie die folgenden Elemente von $K((t))$ in der Form $\sum_{i\geq N} a_i t^i$ (mit $N \in \mathbb{Z}$, $a_i \in K$):

(a) $\frac{1}{1-t}$

(b) $\frac{1}{1-t^2}$

(c) $\frac{1}{(1-t)^2}$.

Aufgabe 5 (2 Punkte):

Geben Sie eine Ordnung auf $\mathbb{Z}^2$ an, so dass es als angeordnete abelsche Gruppe nicht isomorph zur lexikographisch angeordneten Gruppe $\mathbb{Z}^2$ ist.

Aufgabe 6 (3 Punkte):

Sei Γ eine angeordnete abelsche Gruppe und $\Delta \subset \Gamma$ eine *konvexe* Untergruppe, d. h. für alle $0 < a < b$ in Γ gilt: Ist $b \in \Delta$, so ist auch $a \in \Delta$.

Zeigen Sie, dass auch der Quotient Γ/Δ auf natürliche Weise eine angeordnete Gruppe ist.