Modelltheorie II – Blatt 3

Abgabe am 13.5.2020 per Mail an Florian.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (2 Punkte):

Die (abstrakte) divisible Hülle einer Gruppe Γ ist definiert als $\Gamma_{\mathbb{Q}} :=$ „$\{\frac{a}{n} \mid a \in \Gamma, n \in \mathbb{N}\}$“. (Formal ist hiermit gemeint: $\Gamma_{\mathbb{Q}} = (\Gamma \times \mathbb{N}_{>0})/\sim$, mit $(a,n) \sim (a',n') \iff an' = a'n$.)

Zeigen Sie: Ist Γ eine angeordnete abelsche Gruppe, so lässt sich die Anordnung eindeutig auf $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ fortsetzen. (Dass $\Gamma_{\mathbb{Q}}$ eine Gruppe ist, dürfen Sie verwenden.)

Aufgabe 2 (4 Punkte):

(a) Zeigen Sie, dass $\sqrt{2}$ nicht in $\mathbb{Q}_2$ liegt. (Genauer: in $\mathbb{Q}_2$ existiert kein Element α mit $\alpha^2 = 2$.)
Hinweis: Was kann man über die 2-adische Bewertung von $\sqrt{2}$ aus den Bewertungsaxiomen folgern?

(b) Zeigen Sie, dass $\sqrt{2}$ nicht in $\mathbb{Q}_3$ liegt.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\sqrt{2}$ in $\mathbb{Z}_3$ liegen müsste. Was können Sie dann über $\operatorname{res}(\sqrt{2})$ sagen?

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Sei K ein algebraisch abgeschlossener bewerteter Körper. Zeigen Sie:

(a) Die Wertegruppe Γ ist divisibel.
Hinweis: Aufgabe 2 (a) sollte Sie auf eine Idee bringen.

(b) Der Restklassenkörper $\bar{K}$ ist auch algebraisch abgeschlossen.
Hinweis: Wählen Sie zu einem $f \in \bar{K}[X]$ ein beliebiges $f \in \mathcal{O}_K[X]$ mit $\operatorname{res}(f) = \bar{f}$. Zeigen Sie, dass f (mindestens) eine Nullstelle α in $\mathcal{O}_K$ besitzt. Zeigen Sie, dass $\operatorname{res}(\alpha)$ eine Nullstelle von $\bar{f}$ ist.

Aufgabe 4 (6 Punkte):

Sei K ein bewerteter Körper mit Wertegruppe Γ und Restklassenkörper $\bar{K}$. Sei außerdem $L = K(\alpha) \supset K$ eine Körpererweiterung vom Grad 2, mit $a := \alpha^2 \in K$. Zeigen Sie:

(a) Ist $v(a)$ in Γ nicht durch 2 teilbar, so gibt es genau eine Möglichkeit, die Bewertung von K auf L fortzusetzen. Die Wertegruppe der fortgesetzten Bewertung ist dann $\frac{1}{2}\Gamma$ und der Restklassenkörper ist $\bar{L} = \bar{K}$.
Hinweis: Was lässt sich über die Bewertung eines Elements $b + c\alpha \in L$, für $b, c \in K$, sagen? (Bemerkung 1.3.9 ist nützlich.)

(b) Ist $v(a) = 0$ und besitzt $\operatorname{res}(a)$ keine Wurzel in $\bar{K}$, so gibt es genau eine Möglichkeit, die Bewertung von K auf L fortzusetzen.
Hinweis: Zeigen Sie: $v(b + c\alpha) = \min\{v(b), v(c)\}$. (Wenn $v(b + c\alpha) > v(b) = v(c)$ wäre, würde $\operatorname{res}(\frac{b}{c})$ einen Widerspruch liefern.)