Modelltheorie II – Blatt 4

Abgabe am 20.5.2020 per Mail an Florian.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Sei K ein bewerterer Körper und $f \in K[X]$. Wir definieren $v(f)$ als die Gauß-Bewertung von f (Beispiel 1.5.4). Zeigen Sie:

(a) Für alle $a \in \mathcal{O}_K$ gilt: $v(f(a)) \geq v(f)$.

(b) Ist der Restklassenkörper $\bar{K}$ unendlich, so ist $v(f) = \min_{a \in \mathcal{O}_K} v(f(a))$.
Hinweis: Nehmen Sie $v(f) = 0$ an und betrachten Sie $\operatorname{res}(f(a))$.

(c) Geben Sie ein Beispiel für ein Polynom $f \in \mathbb{Q}_p[X]$ an mit $v(f) < \min_{a \in \mathcal{O}_K} v(f(a))$.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Seien p und q Primzahlen und sei $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom vom Grad $n \geq 4$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) Es existiert genau ein $\ell \leq n$, so dass a_ℓ nicht durch p teilbar ist, und für dieses ℓ gilt: $2 \leq \ell \leq n-2$.

(b) a_0 und a_n sind nicht durch p^2 teilbar.

(c) a_1 ist nicht durch q teilbar.

(d) Für alle $i \geq 2$ ist a_i durch q teilbar.

(e) a_n ist nicht durch q^2 teilbar.

Zeigen Sie, dass f irreduzibel ist.

Hinweis: Kann f eine Nullstelle haben? Und: Kann sich f als Produkt von zwei Polynomen schreiben lassen, die beide Grad ≥ 2 haben?

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Sei K ein bewerteter Körper, sei $f \in K[X]$, sei $a \in K^\times$.

(a) Zeigen Sie, dass das Newton-Polygon von $g(X) := f(aX) \in K[X]$ bereits durch das Newton-Polygon von f festgelegt ist, und beschreiben Sie, wie man NP_g aus NP_f erhalten kann.

(b) Zeigen Sie, dass das Newton-Polygon von $g(X) := f(X + a) \in K[X]$ im Allgemeinen nicht durch das Newton-Polygon von f festgelegt ist (d. h. geben Sie f_1, f_2, a an, so dass f_1 und f_2 das gleiche Newton-Polygon haben, aber nicht die entsprechenden Polynome $g_i(X) := f_i(X + a)$).

Aufgabe 4 (4 Punkte):

(a) Zeigen Sie, dass $\sqrt{2}$ in $\mathbb{Q}_7$ liegt, d. h. dass ein $a \in \mathbb{Q}_7$ existiert mit $a^2 = 2$.
Hinweis: Verwenden Sie Hensels Lemma.

(b) Bestimmen Sie die ersten drei Summanden der Reihe eines solches a, d. h., für $a = \sum_{i \geq N} r_i p^i$ (mit $0 \leq r_i < 7$, $r_N \neq 0$): Bestimmen Sie N, r_N, r_{N+1} und r_{N+2}.
Um es dem Korrektor leichter zu machen: Wählen Sie für a diejenige Wurzel aus 2, bei der r_N kleiner ist.
Hinweis: Nachdem Sie N bestimmt haben: Finden Sie eine Bedingung an r_N, die äquivalent dazu ist, dass $v(a^2 - 2) \geq 1$ ist. Finden Sie dann eine Bedingung an r_{N+1}, die dazu äquivalent ist, dass $v(a^2 - 2) \geq 2$ ist. Etc.