Modelltheorie II – Blatt 5

Abgabe am 27.5.2020 per Mail an Florian.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (1+2+2+2 Punkte):

Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass in henselschen Körpern K bereits Newtons Lemma gilt, d. h.: Seien $f \in \mathcal{O}_K[X]$ und $a \in \mathcal{O}_K$ gegeben, so dass $v(f(a)) > 2v(f'(a))$ gilt. Wir suchen eine Nullstelle $b \in \mathcal{O}_K$ von f mit $v(b-a) \geq v(f(a)) - v(f'(a))$.

(a) Zeigen Sie, dass wir ohne Einschränkung annehmen können, dass $a = 0$ ist. (Also: Wenn Newtons Lemma für $a = 0$ und beliebige f gilt, dann gilt es auch für beliebige a und f.)

(b) Wir nehmen ab jetzt an, dass $a = 0$ ist.
Zeigen Sie, dass das Newtonpolygon $\ell \mapsto \mathrm{NP}_f(\ell)$ von f einen Knick bei $\ell = 1$ hat.

(c) Zeigen Sie, dass $c_1, c_2 \in K^\times$ existieren, so dass für $g(x) := c_1 f(c_2 x)$ gilt: $g \in \mathcal{O}_K[X]$, $v(g(0)) > 0$, $v(g'(0)) = 0$.
Hinweis: Drücken Sie unsere Wünsche als Bedingungen an NP_g aus und überlegen Sie sich, wie NP_g und NP_f zusammenhängen.

(d) Finden Sie mit Hensels Lemma eine Nullstelle von g, transformieren Sie diese zu einer Nullstelle b von f, und zeigen Sie, dass b wie gewünscht ist.

Aufgabe 2 (2+1+2+2+2 Punkte):

Wir wollen die Bestimmung der Quadrate in $\mathbb{Q}_p$ für $p \geq 3$ aus der Vorlesung verallgemeinern:

Sei K ein bewerteter Körper mit Wertegruppe $\mathbb{Z}$. Wir fixieren ein Element $\varpi \in K$ mit $v(\varpi) = 1$.[1] Für jede natürliche Zahl $\ell \geq 1$ definieren die *ℓ-te anguläre Komponente* $\mathrm{ac}_\ell(a)$ eines Elements $a \in K^\times$ als das Bild von $a\varpi^{-v(a)}$ in $\mathcal{O}_K/\varpi^\ell\mathcal{O}_K$. (Da $\mathcal{O}_K/\varpi\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_K/\mathcal{M}_K = \bar{K}$ ist, ist insbesondere $\mathrm{ac}_1(a) = \mathrm{res}(a\varpi^{-v(a)})$.) Außerdem setzen wir $\mathrm{ac}_\ell(0) := 0 \in \mathcal{O}_K/\varpi^\ell\mathcal{O}_K$. Zeigen Sie:

(a) Die Einschränkung von ac_ℓ auf $K^\times$ ist ein Gruppenhomomorphismus von $K^\times$ in die Gruppe der Einheiten des Rings $\mathcal{O}_K/\varpi^\ell\mathcal{O}_K$.

(b) Ist $a \in K^\times$ ein Quadrat in K, so ist $v(a)$ gerade, und $\mathrm{ac}_\ell(a)$ ist ein Quadrat in $\mathcal{O}_K/\varpi^\ell\mathcal{O}_K$ für alle $\ell \geq 1$.

(c) Sei nun K henselsch mit $\mathrm{char}\, K \neq 2$. Wir setzen $\ell := 2v(2) + 1$. Dann gilt für $a \in K^\times$:
a ist ein Quadrat in K genau dann, wenn $v(a)$ gerade ist und $\mathrm{ac}_\ell(a)$ ein Quadrat in $\mathcal{O}_K/\varpi^\ell\mathcal{O}_K$ ist.
Hinweis: Nach Aufgabe 1 können Sie Newtons Lemma verwenden. (Sei $f(X) = X^2 - a\varpi^{-v(a)}$ und sei $b \in \mathcal{O}_K^\times$ so, dass $\mathrm{ac}_\ell(a)$ das Quadrat von $\mathrm{ac}_\ell(b)$ ist. Was lässt sich dann über $v(f(b))$ und $v(f'(b))$ sagen?)

(d) Was hat es bei (c) mit „$\ell = 2v(2) + 1$" auf sich? Genauer: Unter welchen Bedingungen ist $\ell = 1$? Kann $\ell > 3$ sein? Welches Argument in (c) würde schief gehen, wenn die Bedingung $\mathrm{char}\, K \neq 2$ fehlen würde?

(e) Zeigen Sie, dass im Fall $\mathrm{char}\, K = 2$ tatsächlich alles schiefgehen kann: Bestimmen Sie die Quadrate in $\mathbb{F}_2((t))$.
Hinweis: Für $b = \sum r_i t^i \in \mathbb{F}_2((t))$ gibt es eine sehr einfache Formel für b^2.

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/MT-V-SS20/

[1] Man nennt ϖ ein „uniformisierendes Element". Im Fall $K = \mathbb{Q}_p$ wählt man üblicherweise $\varpi = p$; im Fall $K = k((t))$ wählt man üblicherweise $\varpi = t$. Der Buchstabe „ϖ" ist übrigens ein komisch geschriebenes π.