Modelltheorie II – Blatt 6

Abgabe am 3.6.2020 per Mail an Florian.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (2 Punkte):

Zeigen Sie, dass keine ganzen Zahlen x, y, z existieren mit $x^2 + y^2 = 3z^2 + 3$.

Hinweis: Betrachten Sie die Gleichung modulo einer hinreichend großen Zweierpotenz.

Aufgabe 2 (6 Punkte):

Sei $f(X) := X^2 \in \mathbb{Z}[X]$ und sei p prim.

(a) Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen $N_r := \#V_f(\mathbb{Z}/p^r\mathbb{Z})$ für alle $r \geq 0$.
Hinweis: Vermutlich brauchen Sie eine Fallunterscheidung danach, ob r gerade oder ungerade ist.

(b) Drücken Sie die Poincaré-Reihe $P_{f,p}(Z)$ als Quotient $g(Z)/h(Z)$ von Polynomen $g, h \in \mathbb{Q}[Z]$ aus.
Hinweis: Zerlegen Sie die Reihe $\sum_{r\geq 0} N_r Z^r$ in eine Reihe für gerade r und eine für ungerade r. Sie sollten zwei geometrische Reihen erhalten.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Sei k ein Körper; wir betrachten $K := k((t))$ als L_{RV}-Struktur. Zeigen Sie: Ist $k \neq \mathbb{F}_2$, so ist die Abbildung $\mathrm{ac}_1\colon K \to k$ nicht $L_{\mathrm{RV}}^{\mathrm{eq}}$-definierbar. (Hierbei fassen wir $k = \bar{K}$ als imaginäre Sorte von K auf.) Zur Erinnerung: $\mathrm{ac}_1(0) = 0$, und für $a \neq 0$ ist $\mathrm{ac}_1(a) = \mathrm{res}(at^{-v(a)})$.

Hinweis: Geben Sie einen Automorphismus α von K als L_{RV}-Struktur an, der die Identität auf $\bar{K}$ induziert, so dass aber im Allgemeinen nicht $\mathrm{ac}_1(\alpha(a)) = \mathrm{ac}_1(a)$ gilt.

Aufgabe 4 (2+1+1 Punkte):

Sei $p \geq 3$ eine Primzahl. Zeigen Sie:

(a) Sind $a, b \in \mathbb{Q}_p$ mit $v(b) \geq v(a)$, so ist $a^2 + pb^2$ auch ein Quadrat.
Hinweis: Verwenden Sie die Charakterisierung von Quadraten vom vorigen Übungsblatt.

(b) Sind $a, b \in \mathbb{Q}_p$ mit $v(b) < v(a)$, so ist $a^2 + pb^2$ kein Quadrat.

(c) Bereits in $\mathbb{Q}_p$ als L_{ring}-Struktur ist $\mathbb{Z}_p$ definierbar.

Anmerkung: Mit einer abgewandelten Version des Arguments kann man (c) auch für $p = 2$ zeigen.