Modelltheorie II – Blatt 7

Abgabe am 10.6.2020 per Mail an Florian.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Auf dem gesamten Blatt arbeiten in der Sprache L_{RV} und in der Theorie der bewerteten Körper der Charakteristik $(0, 0)$.

Aufgabe 1 (3 Punkte):

Drücken Sie die folgenden Aussagen durch VF-quantorenfreie Formeln in den Variablen ζ_i bzw. a_i, b aus.

(a) $v_{\mathrm{RV}}(\zeta_1) > v_{\mathrm{RV}}(\zeta_2)$.

(b) $\zeta_1 + \cdots + \zeta_n$ ist wohldefiniert.
(Achtung: Die Relation „$\zeta_1 + \zeta_2 \approx \zeta_3$“ in der Sprache ist nur für Summen mit zwei Summanden.)

(c) Das Polynom $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ hat keine Kollision bei b.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

(a) Seien $a_1, a_2 \in K$ und $\xi_1, \xi_2 \in \mathrm{RV}$. Wir setzen $B_i := \{x \in K \mid \mathrm{rv}(x - a_i) = \xi_i\}$. Zeigen Sie: Der Schnitt $B_1 \cap B_2$ ist (i) leer oder (ii) gleich B_1 oder (iii) gleich B_2.

(b) Geben Sie VF-quantorenfreie Formeln $\phi_{(\mathrm{i})}(a_1, a_2, \xi_1, \xi_2)$, $\phi_{(\mathrm{ii})}(a_1, a_2, \xi_1, \xi_2)$, $\phi_{(\mathrm{iii})}(a_1, a_2, \xi_1, \xi_2)$ an, die genau dann wahr sind, wenn in (a) der entsprechende Fall vorliegt.

Aufgabe 3 (2+2+1 Punkte):

In dieser Aufgabe nehmen wir an, dass K henselsch ist. (Wir nehmen weiterhin an, dass die Charakteristik $(0, 0)$ ist.) Sei $f \in K[X]$ ein Polynom vom Grad n und seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die Nullstellen von f in K^{alg}.

(a) Die Menge der Elemente von K^{alg}, an denen f eine Kollision hat, ist genau $\{b \in K^{\mathrm{alg}} \mid \exists i\colon \mathrm{rv}(b) = \mathrm{rv}(\alpha_i)\}$.

(b) Sei $\xi \in \mathrm{RV}_K$. Wenn f genau ℓ viele Nullstellen $\alpha \in K^{\mathrm{alg}}$ hat mit $\mathrm{rv}(\alpha) = \xi$, dann besitzt $f^{(\ell)}$ eine Nullstelle $c \in K$ mit $\mathrm{rv}(c) = \xi$.
Hinweis: Reduzieren Sie sich, wie im Beweis von Lemma 2.3.4, auf den Fall $\xi = \mathrm{rv}(1)$. Was ist dann die Vielfachheit von 1 als Nullstelle von $\mathrm{res}(f)$?

(c) Folgern Sie die folgende Verbesserung von Lemma 2.3.4: Die Menge der $b \in K$, an denen f eine Kollision hat, die Form

$$\{b \in K \mid \exists i\colon \mathrm{rv}(b) = \mathrm{rv}(\beta_i\},$$

für Elemente $\beta_1, \ldots, \beta_k$ mit: Es existieren $\ell_1, \ldots, \ell_k$, so dass β_i Nullstelle von $f^{(\ell_i)}$ ist und $\sum_{i=1}^{k} \ell_i \leq n$.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Geben Sie Polynome f_i über $K := \mathbb{Q}((t))$ vom Grad 2 an mit

(a) f_1 hat nirgends eine Kollision.

(b) f_2 selbst hat keine Nullstelle, und f_2 hat eine Kollision bei $b \in K$ genau dann, wenn $\mathrm{rv}(b) = \mathrm{rv}(\beta)$ wobei β die Nullstelle der Ableitung f_2' ist.