Einführung in die Modelltheorie

Anwesenheitsaufgaben vom 19.12.2022

Prof. I. Halupczok

Aufgabe 1:

Seien α_i abzählbare Ordinalzahlen, für $i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann auch $\sup_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i$ abzählbar ist.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie: $\aleph_1 = \{\alpha \in \mathrm{On} \mid \alpha \text{ abzählbar}\}$. (Insbesondere ist die Menge der abzählbaren Kardinalzahlen überabzählbar.)

Aufgabe 3:

Sei M eine Menge von Ordinalzahlen. Zeigen Sie, dass dann $\lambda := \bigcup_{\beta\in M} \beta$ eine Ordinalzahl ist, und zwar das Supremum von M (d. h. λ ist die kleinste Ordinalzahl mit $\lambda \geq \beta$ für alle $\beta \in M$).

Aufgabe 4:

Sei $\alpha \in \mathrm{On}$ Bestimmen Sie das Supremum der Menge α, also $\sup\{\beta \in \mathrm{On} \mid \beta < \alpha\}$. (Ist das Supremum gleich α? Oder so was ähnliches?)

Aufgabe 5:

In dieser Aufgabe wollen wir überprüfen, dass *transfinite Induktion* funktioniert:

Sei $M \subseteq \mathrm{On}$. Wir nehmen folgendes an:

(a) $0 \in M$ („Induktions-Anfang“)

(b) Ist $\beta \in M$, so ist auch $s(\beta) \in M$ („Nachfolger-Schritt“)

(c) Ist λ eine Limes-Ordinalzahl und ist $\beta \in M$ für alle $\beta < \lambda$, so ist auch $\lambda \in M$. („Limes-Schritt“)

Zeigen Sie, dass dann schon $M = \mathrm{On}$ gilt.