Einführung in die Modelltheorie

Anwesenheitsaufgaben vom 7.11.2022

Prof. I. Halupczok

Aufgabe 1:

Sei $I = \mathbb{R}$. Existiert ein Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf I, der keine abzählbare Menge enthält?

(Tipp: Die Antwort ist ja; man kann $\mathcal{U}$ nicht explizit konstruieren, aber man kann mit einem Satz aus der Vorlesung zeigen, dass so ein $\mathcal{U}$ existiert.)

Aufgabe 2:

Zeige, dass die Bedingungen (a) und (b) aus Definition 2.1.1 zusammen äquivalent sind zu: Für alle $J_1, J_2 \subseteq I$ gilt: $J_1 \cap J_2 \in \mathcal{U}$ genau dann, wenn $J_1 \in \mathcal{U}$ und $J_2 \in \mathcal{U}$

Aufgabe 3:

Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter, seien $J_k \in \mathcal{U}$ für $k \in \mathbb{N}$ und sei $J := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} J_k$. Gilt $J \in \mathcal{U}$ (a) immer oder (b) nie oder (c) manchmal?

Aufgabe 4:

Sei $I = \mathbb{N}$, sei $\mathcal{U}$ ein freier Ultrafilter auf I, sei $M_i = \mathbb{Z}$ für alle $i \in I$ und sei $M := \prod_i M_i/\mathcal{U}$.

(a) Zeigen Sie, dass man auf M eine Ordnungsrelation erhält, die folgendermaßen definiert ist: $a_{\mathcal{U}} \leq b_{\mathcal{U}}$ genau dann wenn $\{i \mid a_i \leq b_i\} \in \mathcal{U}$-

(b) Geben Sie eine natürliche Abbildung $\mathbb{Z} \to M$ ein und zeigen Sie, dass diese Abbildung injektiv ist. (Wir fassen ab jetzt $\mathbb{Z}$ mit dieser Abbildung als Teilmenge von M auf.)

(c) Zeigen Sie, dass in M Elemente existieren, die größer als k sind für alle $k \in \mathbb{Z}$.

(d) Existiert in M auch ein Element x mit $0 < x < 1$?