Einführung in die Modelltheorie

Anwesenheitsaufgaben vom 5.12.2022

Prof. I. Halupczok

Aufgabe 1:

Sei $L = \{P\}$, wobei P ein einstelliges Relationsymbol ist, und sei T die L-Theorie, die besagt, dass unendlich viele x existieren, für die $P(x)$ gilt und unendlich viele x, für die $P(x)$ nicht gilt.

(a) Für welche Kardinalzahlen κ gilt: Alle Modelle von T der Kardinalität κ sind isomorph?

(b) Folgt daraus, dass T vollständig ist?

Aufgabe 2:

Sei L die leere Sprache und seien $M \subseteq N$ zwei unendliche Mengen, aufgefasst als L-Strukturen. Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ eine elementare Unterstruktur von $\mathcal{N}$ ist.

Hinweis: $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ ist äquivalent zu: $\mathcal{M} \equiv_{L(M)} \mathcal{N}$.

Aufgabe 3:

In der Vorlesung haben wir sehen: Ist K ein Körper, der elementar äquivalent zu $\mathbb{C}$ ist (in L_{ring}) und die gleiche Kardinalität wie $\mathbb{C}$ hat, so ist K bereits isomorph zu $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die entsprechende Aussage für $\mathbb{R}$ falsch ist, d. h. dass ein Körper K existiert, der elementar äquivalent zu $\mathbb{R}$ ist und die gleiche Kardinlalität wir $\mathbb{R}$ hat, aber nicht isomorph zu $\mathbb{R}$ ist.

Hinweis: Eine Möglichkeit: Finden Sie zunächst einen zu $\mathbb{R}$ elementar äquivalenten Körper (beliebiger Kardinalität), der ein infinitesimales Element a enthält. Wenden Sie dann den Satz von Löwenheim-Skolem in der Sprache $L_{\text{ring}}(a)$ an.