Einführung in die Modelltheorie

Anwesenheitsaufgaben vom 12.12.2022

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Prof. I. Halupczok

Aufgabe 1:

Sei $(M,<)$ eine Wohlordnung.

(a) Zeigen Sie, dass jedes Element $a \in M$, das kein Maximum ist, einen direkten Nachfolger hat b hat (d. h. $b > a$, aber es gibt kein Element zwischen a und b).

(b) Gibt es auch zu jedem nicht-Minimum einen Vorgänger?

Aufgabe 2:

In der Vorlesung haben wir bereits die Ordinalzahlen $0, 1, 2, \dots, \omega, \omega \cup \{\omega\}$ gesehen. Finden Sie weitere Ordinalzahlen. (Können Sie besonders große Ordinalzahlen finden?)

Aufgabe 3:

Welche der folgenden Mengen sind (mit der üblichen Ordnungsrelation) Wohlordnungen?

(a) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}$

(b) $\{m + \frac{1}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$

(c) $\{m - \frac{1}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$

Aufgabe 4:

Für beliebige $\alpha, \beta \in \mathrm{On}$ gilt:

(a) $\alpha < \beta \iff \alpha \in \beta \iff \alpha \subsetneq \beta$.

(b) $\alpha \leq \beta \iff \alpha \subseteq \beta$.

Aufgabe 5:

Zeigen Sie: Ist $(M,<)$ eine wohlgeordnete Menge und ist auch M mit der umgekehrten Ordnung wohlgeordnet, so ist M bereits endlich.

Aufgabe 6:

Zeigen Sie: Eine angeordnete Menge $(M,<)$ ist wohlgeordnet genau dann, wenn keine unendliche absteigende Folge $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$ existiert.