Einführung in die Modelltheorie – Blatt 1

Abgabe bis zum 27.10.2022, 14:30 Uhr

Prof. I. Halupczok

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (2+3 Punkte):

(a) Sei $L = \{<, R\}$ für ein zweistelliges Relationssymbol $<$ und ein dreistelliges Relationssymbol R. Wir betrachten $\mathbb{Z}$ als L-Struktur mit der üblichen Interpretation von $<$, und indem wir R interpretieren durch: $R^{\mathbb{Z}}(a, b, c) \iff a + b = c$ für $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Geben Sie in dieser Sprache Formeln an, die die folgenden Mengen definieren:

(i) $X_1 = \{(x, 3x) \mid x \in \mathbb{Z}\}$

(ii) $X_2 = \{(x, x + 1) \mid x \in \mathbb{Z}\}$

(b) Zeigen Sie: Ist L eine beliebige Sprache und $\mathcal{M}$ eine L-Struktur, so existiert eine Sprache L' und eine L'-Struktur auf M mit folgenden beiden Eigenschaften:

- L' besteht nur aus Relationssymbolen. (Eine solche Sprache L' nennt man *relational*.)
- Für jede Teilmenge $X \subseteq M^n$ (und jedes n) gilt: X ist L-definierbar genau dann, wenn X L'-definierbar ist.

Hinweis: Sie können sich einige Arbeit sparen, indem Sie (die formale Version von) Bemerkung 1.2.7 verwenden.

Aufgabe 2 (2+1+2 Punkte):

Sei K ein Körper und seien V, W K-Vektorräume. (Wir fassen V und W als $L_{K\text{-VR}}$-Strukturen auf.) Zeigen Sie:

(a) Eine Abbildung von V nach W ist genau dann linear, wenn Sie ein $L_{K\text{-VR}}$-Homomorphismus ist.

(b) Wir nehmen an, dass V nicht trival ist. Zeigen Sie, dass es nur vier verschiedene $L_{K\text{-VR}}$-definierbare Teilmengen von V gibt und geben Sie diese vier Mengen explizit an.
Hinweis: Benutzen Sie Bemerkung 1.3.4.

(c) Sei nun $V = K$ (immernoch als $L_{K\text{-VR}}$-Struktur aufgefasst). Zeigen Sie: Jeder Untervektorraum von V^n ist $L_{K\text{-VR}}$-definierbar.