Einführung in die Modelltheorie – Blatt 10

Abgabe bis zum **16.1.2023**, 14:30 Uhr

Prof. I. Halupczok

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Wir definieren die Summe und das Produkt von zwei Ordinalzahlen rekursiv wie folgt:

(i) $\alpha + 0 := \alpha$ und $\alpha \cdot 0 = 0$ für $\alpha \in \mathrm{On}$

(ii) $\alpha + s(\beta) := s(\alpha + \beta)$ und $\alpha \cdot s(\beta) := \alpha \cdot \beta + \alpha$ für $\alpha, \beta \in \mathrm{On}$

(iii) $\alpha + \lambda := \sup_{\beta<\lambda}(\alpha + \beta)$ und $\alpha \cdot \lambda := \sup_{\beta<\lambda}(\alpha \cdot \beta)$ für $\alpha \in \mathrm{On}$ und Limes-Ordinalzahlen λ.

In dieser Aufgabe dürfen Sie ohne Beweis verwenden, dass die plus und mal assoziativ und schwach monoton sind, d. h. aus $\alpha \le \alpha' \wedge \beta \le \beta'$ folgt $\alpha + \beta \le \alpha' + \beta'$ und $\alpha \cdot \beta \le \alpha' \cdot \beta'$. (Achtung: Weder plus noch mal sind kommutativ.)

Zeigen Sie:

(a) Ist M eine Menge von Ordinalzahlen, die kein Maximum besitzt so ist $\sup M$ eine Limes-Ordinalzahl.

(b) Sei α eine Limes-Ordinalzahl und sei M die Menge aller Limes-Ordinalzahlen, die echt kleiner als α sind. Wenn M kein Maximum hat, dann ist $\sup M = \alpha$.

(c) Für jede Ordinalzahl α gilt: $\alpha + \omega$ ist die kleinste Limes-Ordinalzahl, die größer als α ist.

(d) Eine Ordinalzahl α lässt sich in der Form $\omega \cdot \beta$ schreiben (für $\beta \in \mathrm{On}$) genau dann, wenn $\alpha = 0$ ist oder α eine Limes-Ordinalzahl ist.
Hinweis: Es kann nützlich sein, eine Fallunterscheidung danach zu machen, ob die Menge der Limes-Ordinalzahlen kleiner als α ein Maximum hat.

Aufgabe 2 (5 Punkte):

In dieser Aufgabe wollen wir sehen, dass es unterschiedliche „Arten“ von Kardinalzahlen gibt.

(a) Für jede Ordinalzahl α ist offensichtlich $\aleph_\alpha$ viel größer als α selbst… oder?
Wir setzen $\kappa_0 := \aleph_0$, $\kappa_{n+1} := \aleph_{\kappa_n}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda := \sup_{n\in\mathbb{N}} \kappa_n$. Zeigen Sie, dass $\aleph_\lambda = \lambda$ ist.

(b) „Manche Kardinalzahlen lassen sich schlecht von unten annähern“: Sei β eine Nachfolge-Ordinalzahl. Zeigen Sie, dass eine Menge $M \subseteq \aleph_\beta$ nur dann $\aleph_\beta$ als Supremum haben kann, wenn $|M| = \aleph_\beta$ ist. (Insbesondere kann M nicht abzählbar sein.)

(c) „Andere Kardinalzahlen lassen sich gut von unten annähern“: Zeigen Sie: Es gibt beliebig große Kardinalzahlen $\aleph_\beta$, die sich durch eine abzählbare Menge $M \subseteq \aleph_\beta$ annähern lassen, d. h. so dass $\sup M = \aleph_\beta$ ist.
Hinweis: Falls Sie keine Idee haben: In einer anderen Teilaufgabe auf diesem Blatt kam so eine Kardinalzahl vor.