Einführung in die Modelltheorie – Blatt 12

Abgabe bis zum 30.1.2023, 14:30 Uhr

Prof. I. Halupczok

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Sei $L = \{0, s\}$, wobei s ein einstelliges Funktionssymbol ist, und sei T die L-Theorie, die folgendes besagt:

(i) s ist injektiv.

(ii) Das Bild von s ist alles außer 0.

(iii) s ist „zykelfrei", d. h. für jede feste natürliche Zahl $k \geq 1$ gilt die Aussage: $\forall x\colon \underbrace{s(\dots(s}_{k \text{ mal}}(x))\dots) \neq x$.

(Die natürlichen Zahlen mit der Nachfolger-Funktion s sind also ein Modell von T; aber wir wissen bisher nicht, ob T vollständig ist.)

Wir wollen überprüfen, dass T Quantorenelimination hat.

(a) Zeigen Sie zunächst: Jedes Modell $\mathcal{M} \models T$ besteht aus einer Kopie von $\mathbb{N}$ und beliebig vielen Kopien von $\mathbb{Z}$, wobei das Konstantensymbol 0 interpretiert wird als die 0 in der Kopie von $\mathbb{N}$. (Also formaler: $M \cong \mathbb{N} \cup (X \times \mathbb{Z})$ für eine beliebige Menge X, wobei $s^{\mathcal{M}}(n) = n + 1$ für $n \in \mathbb{N}$ und $s^{\mathcal{M}}(x, r) = r + 1$ für $x \in X$ und $r \in \mathbb{Z}$.)

(b) Beschreiben Sie, welche Teilmengen eines Modells $\mathcal{M} \models T$ endlich erzeugte Unterstrukturen sind.

(c) Wir nehmen nun an, dass $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ Modelle von T sind, $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{M}_i$ endlich erzeute Unterstrukturen und $\alpha\colon \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ ein Isomorphismus. Zeigen Sie, dass sich α auf (geeignete) Modelle von T fortsetzen lässt, d. h. dass Unterstrukturen $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{M}_i$ existieren mit $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{B}_i$ und $\mathcal{B}_i \models T$, und so dass sich α zu einem Isomorphismus $\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ fortsetzen lässt.

(d) Zeigen Sie nun, dass T das Quantoreneliminations-Kriterium aus Satz 4.2.4 erfüllt.
Hinweis: Indem Sie (c) anwenden, können Sie sich das Leben leichter machen: Falls das b aus Satz 4.2.4 in B_1 ist, können sie b' mit Hilfe von (c) finden, völlig unabhängig von ϕ. Wenn das b nicht in B_1 liegt, kann man zeigen, dass die Formel $\phi(\underline{a}, y)$ eine Form hat, die sich „besonders leicht realisieren lässt".

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Wir betrachten $\mathbb{Z}$ in der Sprache $L := L_{\text{agrp}} \cup \{1\}$.

(a) Zeigen Sie, dass sich $2\mathbb{Z}$ nicht quantorenfrei definieren lässt.

(b) Hier ist der Versuch eines Beweises, dass $\mathbb{Z}$ in der obigen Sprache L Quantorenelimination hat. Welche(r) der Schritte ist/sind falsch?

(i) Es reicht, das Kriterium aus Satz 4.2.4 zu prüfen. Seien also $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2 = \mathbb{Z}$, seien $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{M}_i$ endlich erzeugte Unterstrukturen und sei $\alpha\colon \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ ein L-Isomorphismus. (ii) Da 1 ein Konstanten-Symbol von L ist und 1 die ganze Gruppe $\mathbb{Z}$ erzeugt, muss schon $\mathcal{A}_i = \mathcal{M}_i$ gelten. (iii) Außerdem muss $\alpha(1) = 1$ sein. (iv) Daraus folgt, dass α die Identität ist. (v) Ist nun $\psi(\underline{a}, y)$ eine quantorenfreie $L(A_1)$-Formel, und existiert ein $b_1 \in \mathcal{M}_1 = \mathbb{Z}$ mit $\mathcal{M}_1 \models \psi(\underline{a}, b_1)$, so gilt trivialerweise auch $\mathcal{M}_2 \models \psi(\alpha(\underline{a}), b_1)$. (vi) Wir können also $b_2 := b_1$ setzen und haben damit das Kriterum aus dem Satz gezeigt.

(c) Geben Sie ein (möglichst) konkretes Beispiel an, das zeigt, dass das Kriterium aus Satz 4.2.4 nicht erfüllt ist.