Einführung in die Modelltheorie – Blatt 3

Abgabe bis zum 7.11.2022, 14:30 Uhr

Prof. I. Halupczok

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (2+3 Punkte):

(a) Zeigen Sie mit Hilfe von Satz 1.5.6: Ist T eine Theorie mit der Eigenschaft, dass jede endliche Teilmenge von T konsistent ist, so ist auch T konsistent.

(b) Wir hatten gesehen, dass es eine L_{ring}-Theorie T gibt, deren Modelle genau die Körper der Charakteristik 0 sind, nämlich

$$T = \{\text{Körperaxiome}\} \cup \{\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ mal}} \neq 0 \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}.$$

Zeigen Sie nun, dass es *keine* L_{ring}-Theorie T' gibt, deren Modelle genau die Körper der Charakteristik $\neq 0$ sind. Hinweis: Zeigen Sie, dass jede endliche Teilmenge von $T \cup T'$ ein Modell besitzt und wenden Sie (a) an.

Aufgabe 2 (1+1+3 Punkte):

(a) Sei L eine Sprache und $\phi(\underline{x})$ eine L-Formel (für $\underline{x} = (x_1, \dots x_n)$). Geben Sie eine L-Aussage ψ an, so dass für jede L-Theorie T gilt:

$T \models \psi$ genau dann, wenn $\phi(\underline{x})$ in jedem Modell M von T eine Funktion definiert

Hierbei ist „Funktion definieren" genau im Sinne von Definition 1.2.6 (b) gemeint. (Insbesondere soll der Definitionsbereich der Funktion wie in 1.2.6 (b) sein.)

(b) Geben Sie eine L_{Me}-Formel $\phi(x, y)$ an, die besagt: $y = \{x\}$.

(c) Zeigen Sie, dass die Formel ϕ aus (b) in jedem Modell von ZFC eine Funktion definiert. Geben Sie dabei (vor allem) an, welche ZFC-Axiome Sie wie verwenden.

Hinweis: Um zu zeigen, dass (zu gegebenem x) y existiert, sollten Sie (mit Hilfe eines geeigneten Axioms) zuächst mal irgend eine Menge finden, die x als Element enthält. Danach können Sie diese Menge (mit Hilfe eines anderen Axioms) geeignet verkleinern.