Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Einführung in die Modelltheorie – Blatt 5

Abgabe bis zum 21.11.2022, 14:30 Uhr

Prof. I. Halupczok

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Sei $\mathcal{M}_i = \mathbb{Z}/i\mathbb{Z}$ für $i \in \mathbb{N}$, aufgefasst als L_{agrp}-Struktur, sei $\mathcal{U}$ ein freier Ultrafilter auf $\mathbb{N}$, und sei $\mathcal{M} = \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_i/\mathcal{U}$. Zeigen Sie (unter Verwendung des Satzes von Łoś): Eine der folgenden Behauptungen gilt immer, eine der folgenden Behauptungen gilt nie, und bei einer gibt es freie Ultrafilter, so dass sie gilt und andere freie Ultrafilter, so dass sie nicht gilt.

(a) Es existiert ein Element $a \in M$ der Ordnung 2.
Hinweis: Es ist nützlich, sich daran zu erinnern, dass in *endlichen* Gruppen G gilt: Die Ordnung jedes Gruppenelements ist ein Teiler von $\#G$.

(b) M besitzt eine Untergruppe, die isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist.
Zur Erinnerung: Das ist äquivalent dazu, dass in M ein Element b der Ordnung ∞ existiert, d. h. mit $nb \neq 0$ für alle $n \geq 1$.

(c) Es existiert ein $n \geq 1$ so dass die Abbildung $\alpha M \to M, a \mapsto na$ injektiv aber nicht surjektiv ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Wir wählen einen freien Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf $I := \mathbb{N}$ und setzen $\mathbb{N}^* := \mathbb{N}^I/\mathcal{U}$. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Łoś:

(a) Für $a, b \in \mathbb{N}^*$ gilt $a \leq^* b$ genau dann, wenn ein $c \in \mathbb{N}^*$ existiert mit $a +^* c = b$, und wenn ein solches c existiert, ist es eindeutig. (Hierbei sind mit $<^*$ und $+^*$ die Interpretationen in $\mathbb{N}^*$ von $<$ und $+$ gemeint.)

(b) Die Abbildung $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*, a \mapsto a +^* 1$ ist injektiv, und ihr Bild ist alles außer 0.

(c) Für jedes $a \in \mathbb{N}^*$ gilt: Entweder es existiert ein $b \in \mathbb{N}^*$, so dass entweder $b + b = a$ oder $b + b + 1 = a$ gilt.

(d) In $\mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ besitzt jedes Element einen Vorgänger, d. h. zu jedem $a \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ existiert ein $b \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ mit $b +^* 1 = a$.
Hinweis: Eine vorige Teilaufgabe ist nützlich.

(e) Sei $a \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass ein $b \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ existiert mit $b +^* n \neq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Hinweis: Man würde vielleicht gerne $b \approx \frac{a}{2}$ wählen...