Einführung in die Modelltheorie – Blatt 6

Abgabe bis zum 28.11.2022, 14:30 Uhr

Prof. I. Halupczok

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (5 Punkte):

Wir wollen ein paar Teile von Bemerkung 2.2.3 verifizieren, die in der Vorlesung nur behauptet wurden. Sei L eine Sprache und sei X die Menge all derjenigen vollständigen L-Theorien T, bei denen aus $T \models \phi$ bereits $\phi \in T$ folgt. Für jede L-Theorie T' definieren wir eine Teilmenge von X:

$$A_{T'} := \{T \in X \mid T' \subseteq T\}$$

Zeigen Sie:

(a) Sind T_1 und T_2 L-Theorien und $T' := \{\phi_1 \vee \phi_2 \mid \phi_1 \in T_1, \phi_2 \in T_2\}$, so ist $A_{T_1} \cup A_{T_2} = A_{T'}$.

(b) Wenn man die Menge $A_{T'}$ als abgeschlossen auffasst, wird X dadurch zu einem topologischen Raum.

(c) Die Mengen der Form $A_{\{\phi\}}$ für L-Aussagen ϕ sind nicht nur abgeschlossen, sondern auch offen.

(d) Diese Mengen $A_{\{\phi\}}$ bilden eine Basis des topologischen Raums, d. h. jede offene Menge $U \subseteq X$ ist Vereinigung von (beliebig vielen) Mengen der Form $A_{\{\phi\}}$.

(e) X ist Hausdorff, d. h. je zwei verschiedene Elemente von X haben disjunkte offene Umgebungen.
Hinweis: Zeigen Sie, dass eine Menge der Form $A_{\{\phi\}}$ existiert, die die beiden Elemente trennt.

Man kann X als topologischen Raum auffassen, bei dem eine Teilmenge $Y \subseteq X$ abgeschlossen ist genau dann, wenn eine (möglicherweise unvollständige) Theorie T' existiert mit $Y = \{T \in X \mid T' \subseteq T\}$. Der Kompaktheitssatz besagt dann genau, dass X kompakt ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Sei $k \geq 1$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie: Ein (unendlicher) Graph ist k-färbbar genau dann, wenn jeder endliche Teilgraph k-färbbar ist.

Genauer:

Ein Graph ist eine Menge M von „Knoten“, wobei je zwei verschiedene Knoten durch eine Kante verbunden sein können, aber nicht müssen. „Verbunden sein“ ist also eine zweistellige Relation R auf M, die symmetrisch (d. h. $R(x,y) \leftrightarrow R(y,x)$) und irreflexiv (d. h. $\neg R(x,x)$) ist.

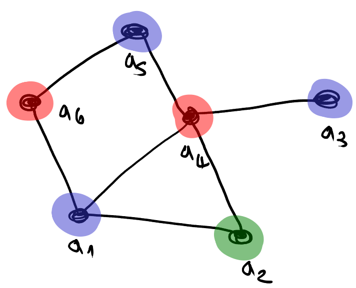
Ein Teilgraph eines Graphs M ist eine Teilmenge $N \subseteq M$ mit der Einschränkung von R als Kantenrelation, d. h. $a, b \in N$ sind in N durch eine Kante verbunden genau dann, wenn sie es in M sind.[1]

Eine k-Färbung eines Graphs M ist einfach nur eine Abbildung $f\colon M \to \{1,\dots,k\}$. (Jedem Knoten wird eine „Farbe“ zugeordnet; die Zahlen $1,\dots,k$ stehen für k verschiedene Farben.)[2] Eine k-Färbung ist „geeignet“, wenn zwei Knoten, die durch eine Kante verbunden sind, nie die gleiche Farbe haben. Man nennt einen Graphen M k-färbbar, wenn eine geeignete k-Färbung von M existiert.

Hinweis: Wenn man Färbungen auf geschickte Art in einer Sprache ausdrückt, folgt das aus dem Kompaktheitssatz. Genauer: Sei $L = \{R\}$, und betrachten Sie das „atomare Diagramm“ von M:

$$\mathrm{Diag}(\mathcal{M}) := \{\phi \in \mathrm{Th}_{L(M)}(\mathcal{M}) \mid \phi \text{ ist eine atomare Aussage oder die Negation einer atomaren Aussage}\}.$$

Erweitern Sie die Sprache so, dass Sie darin eine k-Färbung beschreiben können, und fügen Sie zur Theorie hinzu, dass die k-Färbung geeignet ist. Können Sie aus einem Modell dieser Theorie eine Färbung des ursprünglichen Graphs M erhalten?



Eine drei-Färbung eines eines Graphs. Dieser Graph ist nicht 2-färbbar, da a_1, a_2 und a_4 drei verschiedene Farben haben müssen.

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/MT-V-W22/

[1] Manchmal nennt man ein solches N auch einen „induzierten Teilgraph von M“.

[2] Genauer gesagt handelt es sich hier um Knotenfärbungen. Es gibt auch den Begriff der Kantenfärbung.