Kurzskript Einführung in die Modelltheorie

Immi Halupczok

3. Februar 2023

Inhaltsverzeichnis

Einführung in die Modelltheorie

1 Logik erster Stufe

1.1 Sprachen und Strukturen

Definition 1.1.1 *Eine* ***Sprache*** *(oder* ***Signatur****) L besteht aus einer Menge von* ***Konstantensymbolen****, einer Menge von* ***Funktionssymbolen*** *und einer Menge von* ***Relationssymbolen****. Jedem Funktionssymbol und jedem Relationssymbol wird außerdem eine natürliche Zahl in $\mathbb{N}_{\geq 1}$ zugeordnet, die man die* ***Stelligkeit*** *des Funktions- bzw. Relationssymbol nennt.*

Notation 1.1.2 *Üblicherweise schreibt man L einfach als Vereinigung der drei Mengen. Was Konstanten-, Relations- und Funktionssymbole und was deren Stelligkeit ist, ergibt sich aus der Notation oder wird separat erklärt.*

Beispiel 1.1.3 (a) *Die* ***leere Sprache*** *$L_\emptyset = \emptyset$ (ohne Konstanten-, Funktions- und Relationssymbole).*

(b) *Die* ***Sprache der Gruppen****: $L_{\mathrm{grp}} = \{1, \cdot, {}^{-1}\}$, wobei 1 ein Konstantensymbol ist, $\cdot$ ein zweistelliges Funktionssymbol und ${}^{-1}$ ein einstelliges Funktionssymbol.*

(c) *Die* ***Sprache der abelschen Gruppen****:*[1] *$L_{\mathrm{agrp}} = \{0, +, -\}$, wobei 0 ein Konstantensymbol ist, $+$ ein zweistelliges Funktionssymbol und $-$ ein einstelliges Funktionssymbol.*

(d) *Die* ***Sprache der Ringe****: $L_{\mathrm{ring}} = L_{\mathrm{agrp}} \cup \{1, \cdot\}$, wobei 1 ein Konstantensymbol ist und $\cdot$ ein zweistelliges Funktionssymbol.*

(e) *Die* ***Sprache der angeordneten Mengen****: $L_{\mathrm{ord}} = \{<\}$, wobei $<$ ein zweistelliges Relationssymbol ist.*

Definition 1.1.4 *Sei L eine Sprache. Eine L-****Struktur*** *$\mathcal{M} = (M, \dots)$ besteht aus einer Menge M und:*

(a) *für jedes Konstantensymbol c aus L: ein Element $c^{\mathcal{M}}$;*

(b) *für jedes ℓ-stellige Funktionssymbol f aus L: eine Funktion $f^{\mathcal{M}}\colon M^\ell \to M$*

(c) *für jedes ℓ-stellige Relationssymbol R aus L: eine ℓ-stellige Relation $R^{\mathcal{M}}$ auf M.*[2]

Man nennt M die ***Grundmenge*** *von $\mathcal{M}$, und $c^{\mathcal{M}}$, $f^{\mathcal{M}}$ und $R^{\mathcal{M}}$ sind die* ***Interpretation*** *von c bzw. f bzw. R in $\mathcal{M}$. Diese Interpreationen $c^{\mathcal{M}}$, $f^{\mathcal{M}}$, $R^{\mathcal{M}}$ nennt man auch Konstanten bzw. Funktionen bzw. Relationen aus L. Man sagt auch, $\mathcal{M}$ ist eine* ***L-Struktur auf*** *M.*

Bemerkung: In manchen Büchern wird in der Definition von Struktur gefordert, dass M nicht leer ist.

[1] Eigentlich sollte man besser „Sprache der additiv geschriebenen Gruppen“ sagen.

[2] Zur Erinnerung: Eine solche ℓ-stellige Relation $R^{\mathcal{M}}$ ist gegeben durch eine Teilmenge von M^ℓ; statt „$(a_1, \dots, a_\ell) \in R^{\mathcal{M}}$“ schreibt man jedoch oft „$R^{\mathcal{M}}(a_1, \dots, a_\ell)$“, und man sagt, dass $a_1, \dots, a_\ell$ „in Relation $R^{\mathcal{M}}$ stehen“ oder „die Relation $R^{\mathcal{M}}$ erfüllen“.

Beispiel 1.1.5 (a) *Jede Menge ist eine $L_\emptyset$-Struktur.*

(b) *Jede (abelsche) Gruppe G kann auf natürliche Weise als L_{agrp}-Struktur aufgefasst werden: $\mathcal{G} = (G, +^{\mathcal{G}}, -^{\mathcal{G}}, 0^{\mathcal{G}})$. (Aber: Nicht jede L_{agrp}-Struktur ist eine Gruppe.)*

(c) *Jeder Ring mit 1 kann als L_{ring}-Struktur aufgefasst werden, etc.*

Notation 1.1.6 *Die Grundmenge einer Struktur $\mathcal{M}$ wird immer M heißen, und analog für andere Buchstaben. Oft identifizieren wir eine Struktur $\mathcal{M}$ auch einfach mit ihrer Grundmenge M. Außerdem schreiben wir für die Interpretationen der Symbole aus L statt $c^{\mathcal{M}}$, $f^{\mathcal{M}}$ und $R^{\mathcal{M}}$ oft einfach nur c, f und R.*

Beispiel 1.1.7 *Sei K ein Körper. Die* ***Sprache der K-Vektorräume*** *ist $L_{K\text{-VR}} = L_{\mathrm{agrp}} \cup \{r\cdot \mid r \in K\}$, wobei jedes $r\cdot$ ein einstelliges Funktionssymbol ist. Jeder K-Vektorraum V wird auf natürliche Weise eine $L_{K\text{-VR}}$-Struktur, indem man $r\cdot\colon V \to V$ als Skalarmultiplikation mit r interpretiert.*

Konvention 1.1.8 *Wir werden Konstantensymbole manchmal auch als nullstellige Funktionssymbole auffassen.*

1.2 Formeln und Aussagen

Im folgenden sei L immer eine Sprache.

Definition 1.2.1 *Sei $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ein Tupel von Variablen.*

(a) *Ein „L-**Term** in $\underline{x}$“ ist wie folgt definiert:*
   - (i) *Jede Variable x_i ist ein L-Term in $\underline{x}$.*
   - (ii) *Jedes Konstantensymbol $c \in L$ ist ein L-Term in $\underline{x}$.*
   - (iii) *Sind $t_1, \dots, t_\ell$ L-Terme in $\underline{x}$ und ist f ein ℓ-stelliges Funktionssymbol von L, so ist $f(t_1, \dots, t_\ell)$ ein L-Term in $\underline{x}$.*

(b) *Eine „L-**Formel** (erster Stufe) in $\underline{x}$“ ist wie folgt definiert:*
   - (i) *$\perp$ ist eine L-Formel in $\underline{x}$. (Diese Formel nennt man das **Falsum**.)*
   - (ii) *Sind t_1 und t_2 L-Terme in $\underline{x}$, so ist $t_1 \doteq t_2$ eine L-Formel in $\underline{x}$.*
   - (iii) *Sind $t_1, \dots, t_\ell$ L-Terme in $\underline{x}$ und ist R ein ℓ-stelliges Relationssymbol von L, so ist $R(t_1, \dots, t_\ell)$ eine L-Formel in $\underline{x}$.*
   - (iv) *Ist ψ eine L-Formel in $\underline{x}$, so ist auch $\neg\psi$ eine L-Formel in $\underline{x}$.*
   - (v) *Sind ψ_1 und ψ_2 L-Formeln in $\underline{x}$, so ist auch $(\psi_1 \wedge \psi_2)$ eine L-Formel in $\underline{x}$.*
   - (vi) *Ist ψ eine L-Formel in $x_1, \dots, x_n, y$, so ist $\exists y\colon \psi$ eine L-Formel in $x_1, \dots, x_n$.*

Genauer: Etwas ist ein L-Term bzw. eine L-Formel wenn es sich in endlich vielen *Schritten der Form (i)–(iii) bzw. (i)–(vi) konstruieren lässt.*

(c) *Ist ϕ eine L-Formel in $\underline{x}$, so sagt man auch, $x_1, \dots, x_n$ sind die **freien Variablen** von ϕ.*

(d) *Eine Formel ohne freie Variablen (also im Fall $n = 0$) nennt man auch eine L-**Aussage** (erster Stufe).*

Notation 1.2.2 *Ist t ein L-Term in $\underline{x}$, so schreibt man oft auch $t(\underline{x})$ dafür; analog schreibt man $\phi(\underline{x})$, wenn ϕ eine L-Formel in $\underline{x}$ ist.*

Definition 1.2.3 *Sei $\mathcal{M}$ eine L-Struktur, $\underline{x}$ ein n-Tupel von Variablen und $\underline{a} \in M^n$.*

(a) *Ist $t(\underline{x})$ ein L-Term, so definiert man $t(\underline{a}) \in M$ wie folgt:*
   (i) *Falls $t = x_i$:*
   $t(\underline{a}) = a_i$
   (ii) *Falls $t = c$ (für ein Konstantensymbol $c \in L$):*
   $t(\underline{a}) = c^{\mathcal{M}}$
   (iii) *Falls $t = f(t_1, \dots, t_\ell)$ (für ein ℓ-stelliges Funktionssymbol f):*
   $t(\underline{a}) = f^{\mathcal{M}}(t_1(\underline{a}), \dots, t_\ell(\underline{a}))$

(b) *Ist $\phi(\underline{x})$ eine L-Formel, so definiert man folgendermaßen, ob $\phi(\underline{a})$* ***wahr*** *in $\mathcal{M}$ ist; man sagt auch „$\phi(\underline{a})$* ***gilt*** *(in $\mathcal{M}$)“ oder „$\underline{a}$* ***erfüllt*** *ϕ“, und man schreibt „$\mathcal{M} \models \phi(\underline{a})$“.*
   (i) *Falls $\phi(\underline{x}) = \bot$:*
   $\mathcal{M} \models \phi(\underline{a})$ gilt für kein $\underline{a}$.
   (ii) *Falls $\phi(\underline{x}) = t_1(\underline{x}) \doteq t_2(\underline{x})$:*
   $\mathcal{M} \models \phi(\underline{a})$ genau dann, wenn $t_1(\underline{a}) = t_2(\underline{a})$ ist.
   (iii) *Falls $\phi(\underline{x}) = R(t_1(\underline{x}), \dots, t_\ell(\underline{x}))$:*
   $\mathcal{M} \models \phi(\underline{a})$ genau dann, wenn $(t_1(\underline{a}), \dots, t_\ell(\underline{a})) \in R^{\mathcal{M}}$ ist.
   (iv) *Falls $\phi(\underline{x}) = \neg\psi(\underline{x})$:*
   $\mathcal{M} \models \phi(\underline{a})$ genau dann, wenn $\mathcal{M} \not\models \psi(\underline{a})$ (d. h. wenn $\psi(\underline{a})$ nicht wahr in $\mathcal{M}$ ist).
   (v) *Falls $\phi(\underline{x}) = \psi_1(\underline{x}) \wedge \psi_2(\underline{x})$:*
   $\mathcal{M} \models \phi(\underline{a})$ genau dann, wenn sowohl $\mathcal{M} \models \psi_1(\underline{a})$ als auch $\mathcal{M} \models \psi_2(\underline{a})$ gelten.
   (vi) *Falls $\phi(\underline{x}) = \exists y\colon \psi(\underline{x}, y)$:*
   $\mathcal{M} \models \phi(\underline{a})$ genau dann, wenn es ein $b \in M$ gibt, so dass $\mathcal{M} \models \psi(\underline{a}, b)$ gilt.

(c) *Ist $\phi(\underline{x})$ eine L-Formel so schreibt man $\phi(\mathcal{M}) := \{\underline{a} \in M^n \mid \mathcal{M} \models \phi(\underline{a})\}$ für die Menge aller Elemente, die eine Formel $\phi(\underline{x})$ erfüllen.*

(d) *Ist ϕ eine Aussage, so schreibt man „$\mathcal{M} \models \phi$“ falls ϕ wahr in $\mathcal{M}$ ist.*

Notation 1.2.4 *Bei Formeln verwenden wir oft abkürzende oder intuitive Notationen, insbesondere:*

- *$\psi_1 \vee \psi_2$ bedeutet $\neg(\neg\psi_1 \wedge \neg\psi_2)$.*
- *$\phi \to \psi$ bedeutet $\neg\phi \vee \psi$.*
- *$\phi \leftrightarrow \psi$ bedeutet $(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$.*
- *$t_1 \not\doteq t_2$ bedeutet $\neg t_1 \doteq t_2$.*
- *$\forall y\colon \psi(\underline{x}, y)$ bedeutet $\neg\exists y\colon \neg\psi(\underline{x}, y)$*
- *$\exists y_1, y_2\colon \phi(\underline{x}, y_1, y_2)$ bedeutet $\exists y_1\colon \exists y_2\colon \phi(\underline{x}, y_1, y_2)$; etc.*
- *$\exists^{=1} y\colon \phi(\underline{x}, y)$ bedeutet $\exists y_1\colon \big(\phi(\underline{x}, y_1) \wedge \forall y_2\colon (\phi(\underline{x}, y_2) \to y_2 \doteq y_1)\big)$*
- *Funktionssymbole, die Verknüpfungen darstellen, werden „wie üblich“ geschrieben, also z. B. „$a + b$“ statt $+(a, b)$.*
- *Klammern werden nach Bedarf verwendet (z. B. $(a+b) \cdot c$ für $\cdot(+(a, b), c)$).*
- *Obwohl $(a+b)+c$ und $a+(b+c)$ eigentlich verschiedene Terme sind, lassen wir die Klammern oft weg, da in allen Fällen, die uns interessieren, beide Terme das gleiche ergeben.*
- *Wenn eine Sprache 1 und $+$ enthält, schreiben wir 2 statt $1 + 1$, 3 statt $1 + 1 + 1$, etc.*
- *Wenn eine Sprache $\cdot$ enthält, schreiben wir x^2 statt $x \cdot x$, x^3 statt $x \cdot x \cdot x$,*

etc.

- *Sind $\phi_1, \ldots, \phi_n$ L-Formeln, so setzen wir*

$$\bigvee_{i=1}^{n} \phi_i := \phi_1 \vee \cdots \vee \phi_n$$

und

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i := \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n.$$

(Im Fall $n = 0$ setzen wir $\bigvee_{i=1}^{0} \phi_i = \bot$ und $\bigwedge_{i=1}^{0} \phi_i = \neg\bot$.)[3]

Beispiel 1.2.5 *Ist ϕ die $\wedge$-Verknüpfung aller Gruppenaxiome, ausgedrückt in der Sprache L_{grp}, so gilt für L_{grp}-Strukturen $\mathcal{M}$: $\mathcal{M}$ ist eine Gruppe genau dann, wenn $\mathcal{M} \models \phi$.*

Analoges gilt für abelsche Gruppen, Ringe, Körper, Vektorräume, angeordnete Mengen, etc., jeweils in einer geeigneten Sprache.

Definition 1.2.6 *Sei $\mathcal{M}$ eine L-Struktur.*

(a) *Eine Teilmenge $X \subseteq M^n$ heißt **L-definierbar**, wenn eine L-Formel $\phi(\underline{x})$ existiert, so dass $X = \phi(\mathcal{M})$ gilt.*
(b) *Eine Funktion $f\colon M^n \to M$ heißt **L-definierbar**, wenn der Graph von f L-definierbar ist, d. h. wenn eine L-Formel $\phi(\underline{x})$ existiert mit $\phi(\mathcal{M}) = \{(\underline{x}, f(\underline{x})) \mid \underline{x} \in M^n\}$*
(c) *Ein Element $a \in M$ heißt **L-definierbar**, wenn die Menge $\{a\}$ L-definierbar ist, d. h. wenn eine L-Formel $\phi(x)$ existiert, so dass $\mathcal{M} \models \phi(x)$ nur für $x = a$ gilt.*

*Man sagt auch, X bzw. f bzw. a **wird durch** $\phi(\underline{x})$ **definiert**.*

Bemerkung 1.2.7 *Wenn wir in einer festen L-Struktur $\mathcal{M}$ arbeiten, können wir L-definierbare Objekte innerhalb L-Formeln als Abkürzung verwenden:*

(a) *Ist $X \subseteq M^n$ eine L-definierbare Menge, so können wir in L-Formeln „$\underline{x} \in X$" schreiben.*
(b) *Ist $f\colon M^n \to M$ eine L-definierbare Funktion, so können wir in L-Formeln f wie ein Funktionssymbol verwenden.*
(c) *Ist $a \in M$ ein L-definierbares Element, so können wir in L-Formeln a wie ein Konstantensymbol verwenden.*

Formaler: Ist $\mathcal{M}$ eine L'-Struktur für eine Sprache $L' \supseteq L$, und ist jede Relation, Funktion und Konstante aus $L' \setminus L$ bereits L-definierbar,[4] *so ist L'-Definierbarkeit äquivalent zu L-Definierbarkeit.*

Definition 1.2.8 *Eine **atomare Formel** ist eine Formel der Form (i), (ii) oder (iii) aus Definition 1.2.1 (b).*

[3] Für die immer-wahr-Formel $\neg\bot$ schreibt man auch $\top$, aber das sieht – vor allem handschriftlich – zu sehr wie T aus; deshalb werde ich es nicht verwenden.

[4] Wir nennen eine n-stellige Relation auf M L-definierbar, wenn die entsprechende Teilmenge von M^n L-definierbar ist.

Definition 1.2.9 *Sei $\mathcal{M}$ eine L-Struktur und $A \subseteq M$ eine Teilmenge.*

(a) *Wir schreiben $L(A)$ für die Sprache, die aus L entsteht, indem man für jedes Element $a \in A$ ein Konstantensymbol hinzufügt, das wir auch einfach a nennen.*[5] *Wir fassen dann $\mathcal{M}$ als $L(A)$-Struktur auf, indem wir jedes Konstantensymbol als sich selbst interpretieren.*[6]

(b) *Ist eine Menge $X \subseteq M^n$ $L(A)$-definierbar, so sagt man auch, X ist (in L)* ***mit Parametern aus** A **definierbar**, und man schreibt auch A-**definierbar** dafür. Wenn man X einfach nur **definierbar** nennt, so meint man üblicherweise, dass beliebige Parameter erlaubt sind, also dass X $L(M)$-definierbar ist.*

Bemerkung: Mit der obigen Terminologie bedeutet also $\emptyset$-definierbar das selbe wie L-definierbar. Man verwendet gerne „$\emptyset$-definierbar“, wenn man besonders betonen möchte, dass etwas ohne Parameter definierbar ist.

1.3 Homomorphismen und Einbettungen

Notation 1.3.1 *Für Tupel verwenden wir die Notation $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Ist $\alpha\colon M \to N$ eine Abbildung und $\underline{a} \in M^n$, so schreiben wir $\alpha(\underline{a})$ für das Tupel $(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)) \in N^n$.*

Definition 1.3.2 *Sei L eine Sprache und seien $\mathcal{M} = (M, \dots)$ und $\mathcal{N} = (N, \dots)$ L-Strukturen.*

(a) *Eine (L-)**Homomorphismus** von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$ ist eine Abbildung $\alpha\colon M \to N$, so dass gilt:*
   (i) *Für jedes Konstantensymbol $c \in L$ gilt: $\alpha(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$*
   (ii) *Für jedes n-stellige Funktionssymbol $f \in L$ und alle $\underline{a} \in M^n$ gilt: $\alpha(f^{\mathcal{M}}(\underline{a})) = f^{\mathcal{N}}(\alpha(\underline{a}))$*
   (iii) *Für jedes n-stellige Relationssymbol $R \in L$ und alle $\underline{a} \in M^n$ gilt: $R^{\mathcal{M}}(\underline{a}) \Rightarrow R^{\mathcal{N}}(\alpha(\underline{a}))$*

(b) *Ist α injektiv und gilt in (c) sogar $R^{\mathcal{M}}(\underline{a}) \Leftrightarrow R^{\mathcal{N}}(\alpha(\underline{a}))$, so nennt man α eine (L-)**Einbettung** von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$. (Man kann dann M als Teilmenge von N auffassen.)*

(c) *Eine bijektive Einbettung $\alpha\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ nennt man auch (L-)**Isomorphismus**. Existiert ein (L-)Isomorphismus von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$, so nennt man $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ (L-)**isomorph**.*

(d) *Einen (L-)Isomorphismus von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{M}$ nennt man auch (L-)Automorphismus von $\mathcal{M}$. Notation für die Menge alle L-Automorphismen: $\mathrm{Aut}_L(\mathcal{M})$.*

(e) *Ist $M \subseteq N$ und ist die Abbildung $M \to N, m \mapsto m$ Einbettung von $\mathcal{M}$ nach $\mathcal{N}$, so nennt man $\mathcal{M}$ eine **Unterstruktur** von $\mathcal{N}$ und $\mathcal{N}$ eine **Oberstruktur** oder **Erweiterung** von $\mathcal{M}$. Notation dafür: $\mathcal{M} \subseteq_L \mathcal{N}$.*

Bemerkung: Ein bijektiver L-Homomorphismus ist ein L-Isomorphismus genau dann, wenn die Umkehrabbildung auch ein L-Homomorphismus ist.

[5] Man könnte eigentlich auch „$L \cup A$“ statt $L(A)$ schreiben, aber das ist nicht üblich.

[6] Formaler könnte man also schreiben: wir haben für jedes $a \in A$ ein neues Konstantensymbol $c_a \in L(A)$, und wir setzen $c_a^{\mathcal{M}} := a$.

Beispiel 1.3.3 *Fasst man Gruppen als L_{grp}-Strukturen auf, so entspricht Definition 1.3.2 den üblichen Begriffen: Ein Gruppenhomomorphismus das selbe wie ein L_{grp}-Homomorphismus, ein Gruppenisomorphismus ist das selbe wie ein L_{grp}-Isomorphismus, und eine Untergruppe ist das selbe wie eine L_{grp}-Unterstruktur.*

Analoges gilt für Ringe und Körper in der Sprache L_{ring} und für K-Vektorräume in der Sprache $L_{K\text{-VR}}$ aus Beispiel 1.1.7.

Bemerkung 1.3.4

(a) *Ist $\alpha\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ ein L-Homomorphismus, $\phi(\underline{x})$ eine atomare L-Formel und $\underline{a} \in M^n$, so gilt die Implikation $\mathcal{M} \models \phi(\underline{a}) \Rightarrow \mathcal{N} \models \phi(\alpha(\underline{a}))$.*

(b) *Ist α eine L-Einbettung, so hat man sogar eine Äquivalenz: $\mathcal{M} \models \phi(\underline{a}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \phi(\alpha(\underline{a}))$.*

(c) *Ist α ein L-Isomorphismus, so gilt die Äquivalenz sogar für beliebige L-Formeln $\phi(\underline{x})$ (statt nur für atomare $\phi(\underline{x})$).*

(d) *Insbesondere bilden L-Automorphismen einer Struktur $\mathcal{M}$ L-definierbare Teilmengen $X \subseteq M^n$ auf sich selbst ab.*

1.4 Theorien

Definition 1.4.1

(a) *Eine L-**Theorie** ist eine (beliebige) Menge T von L-Aussagen. Die Aussagen in T nennt man manchmal auch die **Axiome** von T.*

(b) *Eine L-Struktur $\mathcal{M}$ nennt man **Modell** einer L-Theorie T, wenn für alle $\phi \in T$ gilt: $\mathcal{M} \models \phi$. Notation dafür: $\mathcal{M} \models T$.*

Beispiel 1.4.2 *Es gibt eine L_{grp}-Theorie, deren Modelle genau die Gruppen sind (siehe Beispiel 1.2.5); diese Theorie nennt man die **Theorie der Gruppen**. Analog definiert man die **Theorie der abelschen Gruppen** (in der Sprache L_{agrp}), **der Ringe** (in L_{ring}), **der Körper** (in L_{ring}), **der angeordneten Mengen** (in L_{ord}), etc.; ist K ein Körper, so existiert auch eine $L_{K\text{-VR}}$-**Theorie der K-Vektorräume**.*

Beispiel 1.4.3 *Es gibt eine $L_{\emptyset}$-**Theorie der unendlichen Mengen**, d. h. deren Modelle genau die unendlichen Mengen sind.*

Beispiel 1.4.4 *Es gibt eine L_{ring}-**Theorie der algebraisch abgeschlossenen Körper**. Diese Theorie nennt man* ACF*.*[7]

Definition 1.4.5

(a) *Eine L-Theorie T heißt **konsistent**, wenn sie ein Modell besitzt (d. h. wenn es eine L-Struktur $\mathcal{M}$ gibt mit $\mathcal{M} \models T$); sonst heißt T **inkonsistent**.*

(b) *Zwei L-Theorien T_1 und T_2 heißen **äquivalent** (Notation: $T_1 \equiv T_2$), wenn sie die gleichen Modelle besitzen (d. h. wenn für jede L-Struktur $\mathcal{M}$ gilt: $\mathcal{M} \models T_1$ gdw. $\mathcal{M} \models T_2$).*

(c) *Eine L-Aussage ϕ **folgt** aus einer L-Theorie T (Notation dafür: $T \models \phi$), wenn ϕ in jedem Modell von T wahr ist (d. h. wenn für jede L-Struktur $\mathcal{M}$ mit $\mathcal{M} \models T$ gilt: $\mathcal{M} \models \phi$).*

[7] ACF steht für <u>a</u>lgebraically <u>c</u>losed <u>f</u>ields.

Bemerkung: Oft werden wir zwischen äquivalenten Theorien nicht unterscheiden.

Lemma 1.4.6 *Für eine L-Theorie T sind äquivalent:*

(a) *T ist inkonsistent.*
(b) *Für alle L-Aussagen ϕ gilt $T \models \phi$.*
(c) *$T \models \perp$.*
(d) *Es gibt eine L-Aussage ϕ mit $T \models \phi$ und $T \models \neg\phi$.*

Definition 1.4.7 *Eine L-Theorie T heißt* ***vollständig****, wenn für jede L-Aussage ϕ entweder $T \models \phi$ oder $T \models \neg\phi$ gilt (aber nicht beides). Eine* ***Vervollständigung*** *einer konsistenten Theorie T' ist eine vollständige Theorie T'', die T enthält.*

Definition 1.4.8 *Ist $\mathcal{M}$ eine L-Struktur, so ist die* ***Theorie von*** *$\mathcal{M}$ die Menge aller L-Aussagen, die in $\mathcal{M}$ wahr sind:*

$$\mathrm{Th}(\mathcal{M}) := \{\phi \ L\text{-}Aussage \mid \mathcal{M} \models \phi\}.$$

Manchmal schreiben wir auch $\mathrm{Th}_L(\mathcal{M})$, um deutlich zu machen, in welcher Sprache wir arbeiten.

Bemerkung: $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ ist vollständig.

Definition 1.4.9 *Zwei L-Strukturen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ heißen* ***elementar äquivalent*** *(Notation dafür: $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ oder $\mathcal{M} \equiv_L \mathcal{N}$), wenn $\mathrm{Th}(\mathcal{M}) = \mathrm{Th}(\mathcal{N})$ gilt.*

Lemma 1.4.10 *Für eine L-Theorie T sind äquivalent:*

(a) *T ist vollständig.*
(b) *T ist konsistent, und alle Modelle von T sind elementar äquivalent.*
(c) *Es gibt eine L-Struktur $\mathcal{M}$, so dass T äquivalent zu $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ ist.*

Definition 1.4.11 *Sei T eine L-Theorie. Zwei L-Formeln $\phi_1(\underline{x})$ und $\phi_2(\underline{x})$ heißen* ***äquivalent modulo*** *T, wenn gilt: $T \models \forall \underline{x}\colon (\phi_1(\underline{x}) \leftrightarrow \phi_2(\underline{x}))$. Im Fall $T = \emptyset$ sagt man einfach nur „$\phi_1(\underline{x})$ und $\phi_2(\underline{x})$ sind* ***äquivalent****“.*

Bemerkung: Das ist äquivalent zu: Für alle Modelle $\mathcal{M} \models T$ gilt: $\phi_1(\mathcal{M}) = \phi_2(\mathcal{M})$.

1.5 Ausflug: der Hilbertkalkül

Sei L eine Sprache.

In diesem Abschnitt müssen wir den Formelbegriff etwas präzisieren:

- Wir verwenden eine etwas andere Konvention für die Definition einer Formel als in Definition 1.2.1: Statt „$\exists y\colon \phi$“ als Formel zu definieren, definieren wir „$\forall y\colon \phi$“ als Formel, und wir fassen „$\exists y\colon \phi$“ als Abkürzung für „$\neg\forall y\colon \neg\phi$“ auf.

- $\phi \to \psi$ soll eine Abkürzung für $\neg(\phi \wedge \neg\psi)$ sein.

Definition 1.5.1 *Eine **Tautologie** ist eine L-Aussage, die in jeder L-Struktur gilt.*

Lemma 1.5.2 *Die folgenden L-Aussagen sind Tautologien; hierbei sind ϕ, ψ und χ L-Formeln (in den angegebenen Variablen), und t ist ein L-Term.*

(a) $\neg\bot$.
(b) $\forall \underline{x} : \big((\phi(\underline{x}) \to (\psi(\underline{x}) \to \chi(\underline{x}))) \;\to\; ((\phi(\underline{x}) \to \psi(\underline{x})) \to (\phi(\underline{x}) \to \chi(\underline{x})))\big)$
(c) $\forall \underline{x} : \big(\phi(\underline{x}) \;\to\; (\psi(\underline{x}) \to (\phi(\underline{x}) \wedge \psi(\underline{x})))\big)$
(d) $\forall \underline{x} : \big((\phi(\underline{x}) \wedge \psi(\underline{x})) \;\to\; \phi(\underline{x})\big)$
(e) $\forall \underline{x} : \big((\phi(\underline{x}) \wedge \psi(\underline{x})) \;\to\; \psi(\underline{x})\big)$
(f) $\forall \underline{x} : \big((\phi(\underline{x}) \to \neg\psi(\underline{x})) \;\to\; (\psi(\underline{x}) \to \neg\phi(\underline{x}))\big)$
(g) $\forall \underline{x} : \big(\forall y\, \phi(\underline{x}, y) \;\to\; \phi(\underline{x}, t(\underline{x}))\big)$
(h) $\forall \underline{x} : \big(\phi(\underline{x}) \;\to\; \forall y\, \phi(\underline{x})\big)$
(i) $\forall \underline{x} : \big(\forall y\, (\phi(\underline{x}, y) \;\to\; \psi(\underline{x}, y)) \;\to\; (\forall y\, \phi(\underline{x}, y) \;\to\; \forall y\, (\psi(\underline{x}, y)))\big)$
(j) $\forall y : y = y$
(k) $\forall \underline{x}, y, z : \big(y = z \;\to\; (\phi(\underline{x}, y, z) \;\to\; \phi(\underline{x}, y, y))\big)$

Lemma 1.5.3 (Modus Ponens) *Ist T eine L-Theorie und sind $\phi(\underline{x})$, $\psi(\underline{x})$ L-Formeln mit $T \models \forall \underline{x}\colon \phi(\underline{x})$ und $T \models \forall \underline{x}\colon (\phi(\underline{x}) \to \psi(\underline{x}))$, so gilt $T \models \forall \underline{x}\colon \psi(\underline{x})$.*

Definition 1.5.4 *Sei L eine Sprache und T eine L-Theorie. Wir definieren wie folgt, wann eine L-Aussage ϕ **aus** T **herleitbar** ist (Notation dafür: $T \mid\!\sim \phi$):*

(a) *Jede Aussage in T ist aus T herleitbar.*
(b) *Jede Tautologie aus Lemma 1.5.2 ist aus T herleitbar.*
(c) *Sind ϕ und ψ L-Aussagen, die sich nur darin unterscheiden, dass die Variablen umbenannt wurden, und gilt $T \mid\!\sim \phi$, so gilt auch $T \mid\!\sim \psi$.*
(d) *Modus Ponens: Gilt $T \mid\!\sim \forall \underline{x}\colon \phi(\underline{x})$ und $T \mid\!\sim \forall \underline{x}\colon (\phi(\underline{x}) \to \psi(\underline{x}))$ (für L-Formeln $\phi(\underline{x})$, $\psi(\underline{x})$), so gilt auch $T \mid\!\sim \forall \underline{x}\colon \psi(\underline{x})$.*

Genauer: Eine Aussage ist aus T herleitbar, wenn sie sich in endlich vielen *Schritten der obigen Form erhalten lässt.*[8]

Satz 1.5.5 *Für L-Theorien T und L-Aussagen ϕ gilt: $T \models \phi \iff T \mid\!\sim \phi$,*

Die Richtung $\Rightarrow$ ist der **Gödelsche Vollständigkeitssatz**.

Lemma 1.5.6 *Für eine L-Theorie T und L-Aussagen ϕ und ψ gilt: $T \cup \{\phi\} \mid\!\sim \psi \iff T \mid\!\sim \phi \to \psi$*

Bemerkung 1.5.7 *Gilt $T \mid\!\sim \phi$, so ist die Herleitung von ϕ aus T endlich lang und benutzt insbesondere nur endlich viele Aussagen aus T. Es existiert also eine endliche Teilmenge $T_0 \subseteq T$ mit $T_0 \mid\!\sim \phi$. Mit Satz 1.5.5 folgt daraus: Gilt $T \models \phi$, so existiert eine endliche Teilmenge $T_0 \subseteq T$ mit $T_0 \models \phi$.*

[8] Diese Definition von Herleitung nennt man einen **Hilbertkalkül**.

1.6 Ausflug: ZCF

Definition 1.6.1 *Die* ***Sprache der Mengenlehre*** *ist* $L_{\mathrm{Me}} = \{\dot\in\}$, *wobei* $\dot\in$ *ein zweistelliges Relationssymbol ist.*

Notation 1.6.2 *Wir verwenden wie üblich abkürzende Notationen:*

(a) $x \dot\notin y$ *heißt* $\neg x \dot\in y$.
(b) $x \subseteq y$ *heißt* $\forall z\colon (z \in x \to z \in y)$
(c) $x \cap y$ *ist diejenige Menge* z, *für die gilt:* $\forall w\colon (w \in z \iff (w \in x \wedge w \in y))$ *(Bisher wissen wir weder, ob* z *existiert, noch ob* z *eindeutig ist.)*
(d) *Analog:* $x \cup y$, $\{y \mid \phi(y)\}$, $\mathcal{P}(x)$, $\emptyset$, ...

Definition 1.6.3 *Die* ***naive Mengenlehre*** *ist die* $\dot\in$*-Theorie mit den folgenden Axiomen:*

(a) ***Extensionalität:***
$\forall x, x'\colon (\forall z\colon (z \dot\in x \leftrightarrow z \dot\in x') \to x \doteq x')$
(b) ***Komprehension:*** *Für jede* L_{Me}*-Formel* $\phi(x)$*:*
$\exists y\colon \forall z\colon (z \in y \leftrightarrow \phi(z))$

Bemerkung 1.6.4 *Aus Komprehension folgt, dass die Mengen aus Notation 1.6.2 (c), (d) existieren, und aus Extensionalität folgt, dass sie eindeutig sind.*

Lemma 1.6.5 (Russelsche Antinomie) *Die naive Mengenlehre ist inkonsistent.*

Definition 1.6.6 *Die* ***Zermelo-Fränkel-Mengenlehre*** *ist die* $\dot\in$*-Theorie mit den folgenden Axiomen; sie wird mit* ZFC *bezeichnet:*[9]

(a) ***Extensionalität:***
$\forall x, x'\colon (\forall z\colon (z \dot\in x \leftrightarrow z \dot\in x') \to x \doteq x')$
(b) ***Aussonderung:*** *Für jede* L_{Me}*-Formel* $\phi(z, \underline{w})$*:*
$\forall \underline{w}, x\colon \exists y\colon \forall z\colon (z \dot\in y \leftrightarrow (z \dot\in x \wedge \phi(z, \underline{w})))$
Informeller: $\{z \in x \mid \phi(z, \underline{w})\}$ *existiert*
(c) ***Potenzmenge:***
$\forall x\colon \exists y\colon \forall z\colon (z \dot\in y \leftrightarrow z \subseteq x)$
Informeller: $\mathcal{P}(x)$ *existiert*
(d) ***Ersetzung:*** *Für jede* L_{Me}*-Formel* $\phi(u, z, \underline{w})$*:*
$\forall \underline{w}, x\colon \big(\forall u \exists^{=1} z\colon \phi(u, z, \underline{w}) \quad \to \quad \exists y\colon \forall z\colon (z \dot\in y \leftrightarrow \exists u\colon (u \dot\in x \wedge \phi(u, z, \underline{w})))\big)$
Informeller: Ist f *eine definierbare Funktion (mit Paremtern* $\underline{w}$*), und ist* x *eine Menge, so existiert die Bildmenge* $\{f(u) \mid u \in x\}$.
(e) ***Vereinigung:***
$\forall x\colon \exists y\colon \forall z\colon (z \dot\in y \leftrightarrow \exists w\colon (w \dot\in x \wedge z \dot\in w))$
Informeller: Ist x *eine Menge von Mengen, so existiert deren Vereinigung* $\bigcup_{w \in x} w$.
(f) ***Unendlichkeit:***
$\exists x\colon (\emptyset \dot\in x \wedge \forall z \dot\in x\colon z \cup \{z\} \dot\in x)$

[9] Das steht für Zermelo, Fränkel und Choice; Choice bezieht sich auf das Auswahlaxiom, das am Anfang noch nicht dabei war.

(Dieses Axiom stellt sicher, dass mindestens eine unendliche Menge existiert.)

(g) ***Fundierung:***
$\forall x\colon (x \not\doteq \emptyset \to \exists z \mathrel{\dot\in} x\colon z \cap x \doteq \emptyset)$
(Dieses Axiom besagt insbesondere, dass keine Menge sich selbst enthält, dass keine zwei verschiedenen Mengen sich gegenseitig enthalten, etc.)

(h) ***Auswahl:***
$\forall x\colon \big((\emptyset \mathrel{\dot\notin} x \wedge \forall y, y' \mathrel{\dot\in} x\colon y \cap y' = \emptyset) \to \exists w\colon \forall y \in x\colon \exists^{=1} z\colon z \in w \cap y\big)$
Informeller: Ist x eine Menge disjunkter, nicht-leerer Mengen y, so existiert eine Menge w, die genau ein Element aus jedem $y \in x$ enthält.

Bemerkung: Aus Fundierung folgt insbesondere, dass sich keine Menge selbst enthält.

Bemerkung 1.6.7 *Man kann (fast) die gesamte Mathematik innerhalb eines Modells von ZFC ausführen, und (fast) alle Beweise lassen sich als formale Herleitungen aus ZFC aufschreiben. Dazu müssen nur alle mathematischen Objekte, mit denen wir arbeiten wollen, geeignet als Mengen aufgefasst werden. Dies geht insbesondere wie folgt:*

- *Ein Paar (x, y) wird aufgefasst als die Menge $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. (Man nennt das auch ein **Kuratowksi-Paar**.)*
- *Eine Funktion $f\colon a \to b$ (für Mengen a und b) wird aufgefasst als ihr Graph (der eine Teilmenge von $a \times b = \{(x, y) \mid x \in a, y \in b\}$ ist).*
- *Die natürlichen Zahlen werden wie folgt als Mengen aufgefasst: $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$, etc.; darauf aufbauend definiert man dann ganze, rationale, reelle und komplexe Zahlen, etc.*
- *Auch die Begriffe aus dieser Vorlesung (Formeln, Theorien, formale Herleitungen) lassen sich auf diese Art innerhalb von ZFC formalisieren. Zum Beispiel lässt sich auch der Gödelsche Vollständigkeitssatz 1.5.5 ausdrücken und aus* ZFC *herleiten.*

2 Elementare Erweiterungen und der Kompaktheitssatz

2.1 Ultrafilter, Ultraprodukte und der Satz von Łoś

In dem gesamten Abschnitt sei I eine nicht-leere (Index-)Menge.

Definition 2.1.1 *Ein **Ultrafilter** auf I ist eine Teilmenge $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(I)$, so dass für alle $J_1, J_2 \subseteq I$ gilt:*

(a) *Sind $J_1 \in \mathcal{U}$ und $J_2 \in \mathcal{U}$, so ist auch $J_1 \cap J_2 \in \mathcal{U}$.*
(b) *Ist $J_1 \in \mathcal{U}$ und $J_1 \subseteq J_2$, so ist auch $J_2 \in \mathcal{U}$.*
(c) *Genau eine der Mengen J_1 und $I \setminus J_1$ liegt in $\mathcal{U}$.*

*Die Mengen, die in $\mathcal{U}$ liegen, nennt man **groß** (bezüglich $\mathcal{U}$), die anderen **klein**.*

Bemerkung 2.1.2 *Aus den Bedingungen folgt insbesondere, dass I groß und $\emptyset$ klein ist.*

Beispiel 2.1.3 *Sei $i_0 \in I$ fest. Dann ist $\mathcal{U} := \{J \subseteq I \mid i_0 \in J\}$ ein Ultrafilter auf I. Ultrafilter dieser Form nennt man **Hauptultrafilter**. Ultrafilter, die nicht diese Form haben, nennt man **freie Ultrafilter**.*

Satz 2.1.4 *Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(I)$ so, dass je endlich viele Mengen aus $\mathcal{A}$ nicht-leeren Schnitt haben. Dann existiert ein Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf I, der $\mathcal{A}$ enthält.*

Beispiel 2.1.5 *Ist I unendlich, so erfüllt $\mathcal{A} := \{J \subseteq I \mid I \setminus J \text{ endlich}\}$ die Bedingung aus Satz 2.1.4. Es existiert also ein Ultrafilter, der $\mathcal{A}$ enthält; ein solcher Ultrafilter ist frei.*

Bemerkung: Auf ähnliche Weise kann man einen freien Ultrafilter konstruieren, der außerdem eine vorgegebene unendliche Menge enthält.

Von nun an sei (für den Rest von Abschnitt 2.1) $\mathcal{U}$ ein fester Ultrafilter auf I, und groß und klein beziehen sich immer auf $\mathcal{U}$.

Definition 2.1.6 (a) *Ist $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von nicht-leeren Mengen, so ist das **Ultraprodukt** dieser Mengen M_i (bezüglich $\mathcal{U}$) definiert als*

$$M = \prod_{i\in I} M_i \,/\mathcal{U} := \left(\prod_{i\in I} M_i\right)/\!\sim,$$

wobei $\sim$ definiert ist durch: $(a_i)_{i\in I} \sim (a'_i)_{i\in I}$ genau dann, wenn $\{i \in I \mid a_i = a'_i\}$ groß ist.
Wir schreiben $a_{\mathcal{U}} \in M$ für die Äquivalenzklasse von $(a_i)_{i\in I}$. Ist $\underline{a}_i = (a_{1,i}, \dots, a_{n,i}) \in M_i^n$ ein n-Tupel für jedes $i \in I$, so schreiben wir $\underline{a}_{\mathcal{U}} = (a_{1,\mathcal{U}}, \dots, a_{n,\mathcal{U}}) \in M^n$ für das entsprechende Tupel von Äquivalenzklassen.

(b) *Ist außerdem für jedes i eine Teilmenge $X_i \subseteq M_i^n$ gegeben, so definieren wir das Ultraprodukt $X_{\mathcal{U}} := \prod_i X_i/\mathcal{U}$ als die Teilmenge von M^n, die gegeben ist durch: $\underline{a}_{\mathcal{U}} \in \prod_i X_i/\mathcal{U}$ genau dann, wenn die Menge $\{i \in I \mid \underline{a}_i \in X_i\}$ groß ist.*

Lemma 2.1.7 *In Definition 2.1.6 ist alles wohldefiniert, d. h.:*

(a) *Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.*
(b) *Die Bedingung an $\underline{a}_{\mathcal{U}}$ hängt nicht vom Repräsentanten $(\underline{a}_i)_i$ ab.*

Definition 2.1.8 *Sei L eine Sprache und sei $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ eine Familie von nicht-leeren L-Strukturen. Wir definieren das **Ultraprodukt** $\mathcal{M} = \prod_i \mathcal{M}_i/\mathcal{U}$ als die L-Struktur mit der Grundmenge $\prod_i M_i/\mathcal{U}$ und mit der folgenden Interpretation der Symbole aus L; hierbei fassen wir Konstanten als 0-stellige Funktionen auf:*

(a) *Ist $R \in L$ ein Relationsymbol, so setze $R^{\mathcal{M}} := \prod_i R^{\mathcal{M}_i}/\mathcal{U}$.*
(b) *Ist $f \in L$ ein n-stelliges Funktionssymbol, $\underline{a}_i \in M_i^n$ für alle i und $b_i = f(\underline{a}_i)$, so setze $f^{\mathcal{M}}(\underline{a}_{\mathcal{U}}) := b_{\mathcal{U}}$.*

Lemma 2.1.9 *Dies ist wohldefiniert, d. h. in (b) hängt $b_{\mathcal{U}}$ nicht von der Wahl des Repräsentanten $(\underline{a}_i)_{i\in I}$ von $\underline{a}_{\mathcal{U}}$ ab.*

Satz 2.1.10 (Satz von Łoś) *Sei weiterhin I eine nicht-leere Index-Menge, $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf I, L eine Sprache, $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ eine Familie von nicht-leeren L-Strukturen und $\mathcal{M} := \prod_i \mathcal{M}_i/\mathcal{U}$ ihr Ultraprodukt. Sei außerdem $\phi(\underline{x})$ eine L-Formel und sei $\underline{a}_i \in M_i^n$ für $i \in I$. Dann gilt:*

$$\mathcal{M} \models \phi(\underline{a}_\mathcal{U}) \iff \{i \in I \mid \mathcal{M}_i \models \phi(\underline{a}_i)\} \text{ ist groß.}$$

Korollar 2.1.11 *Ist $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ eine Familie von Modellen einer Theorie T, so ist auch ihr Ultraprodukt $\prod_i \mathcal{M}_i/\mathcal{U}$ ein Modell von T.*

Korollar 2.1.12 *Ist T eine Theorie, die beliebig große endliche Modelle besitzt, so besitzt T auch unendliche Modelle.*

Definition 2.1.13 *Ein Ultraprodukt von lauter gleichen L-Strukturen $\mathcal{M}$ nennt man auch eine **Ultrapotenz** von $\mathcal{M}$. Man schreibt auch $\mathcal{M}^I/\mathcal{U}$ dafür.*

Bemerkung 2.1.14 *Sei $\mathcal{M}$ eine L-Struktur und $\mathcal{M}^* := \mathcal{M}^I/\mathcal{U}$ eine Ultrapotenz davon. Dann gilt:*

(a) *$\mathcal{M}^*$ ist elementar äquivalent zu $\mathcal{M}$.*
(b) *Wir können (und werden) $\mathcal{M}$ als Teilmenge von $\mathcal{M}^*$ auffassen, indem wir jedes Element $a \in \mathcal{M}$ mit $a_\mathcal{U} \in \mathcal{M}^*$ identifizieren, für $a_i = a$. (Äquivalent: Wir nehmen o. E. an, dass ein Konstantensymbol für a in L ist. Dann identifizieren wir a mit $a^{\mathcal{M}^*}$.)*
(c) *Ist $I = \mathbb{N}$ und $\mathcal{U}$ ein freier Ultrafilter, so ist $\mathcal{M}^* \supsetneq \mathcal{M}$.*

Notation 2.1.15 *Sei M eine beliebige Menge. Wir machen M zu einer L-Struktur $\mathcal{M}$ in einer Sprache L, die aus sämtlichen Konstanten in M, sämtlichen Funktionen $f\colon M^n \to M$ und sämtlichen Relationen $R \subseteq M^n$ (für alle n) besteht. Sei nun $M^* := \mathcal{M}^I/\mathcal{U}$ eine Ultrapotenz. Für f und R wie oben bezeichnen wir die Interpretation von f in $\mathcal{M}^*$ mit $f^*\colon (M^*)^n \to M^*$ und die Interpretation von R in $\mathcal{M}$ mit $R^* \subseteq (M^*)^n$.*

Bemerkung 2.1.16 *Mit diesen Notationen gilt...*

(a) *... für Funktionen $f\colon M^n \to M$: f^* ist eine Fortsetzung von f (d. h. $f^*|_{M^n} = f$;*
(b) *... für Relationen $R \subseteq M^n$: $R = R^* \cap M^n$.*

Lemma 2.1.17 *Sei $I = \mathbb{N}$ und $\mathcal{U}$ ein freier Ultrafilter auf I.*

(a) *Eine Teilmenge $A \subseteq M$ ist endlich genau dann, wenn $A^* = A$ ist.*
(b) *Ist $A_0 \supseteq A_1 \supseteq \dots$ eine absteigende Folge von Teilmengen von M, so ist $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k^* \neq \emptyset$ genau dann, wenn keine der Mengen A_k leer ist.*

Beispiel-Anwendung 2.1.18 *Wir wenden das Lemma auf $M = \mathbb{N}$ an. Dann gilt:*

(a) *$\mathbb{N}^*$ enthält unendlich große Elemente a, d. h. $a > k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Es gilt sogar: Alle Elemente von $\mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ sind unendlich groß.*

(b) *Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{N}$ ist unendlich genau dann, wenn A^* unendliche Elemente enthält. Das bedeutet zum Beispiel, dass die Primzahlzwillingsvermutung (die besagt, dass unendlich viele Primzahlzwillinge[10] existieren) gilt genau dann, wenn in $\mathbb{N}^*$ mindestens ein unendliches Primzahlzwillingspaar existiert.*

Beispiel-Anwendung 2.1.19 *Wir wenden das Lemma auf $\mathbb{R}$ an. Dann existieren in $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}^I/\mathcal{U}$* ***infinitesimale*** *Elemente a, d. h. es gilt: $|a| < r$ für alle $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Wir betrachten eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$. Dann gilt: f ist stetig bei 0 genau dann, wenn für alle infinitesimalen $a \in \mathbb{R}^*$ gilt: $f(a)$ ist infinitesimal.*

2.2 Der Kompaktheitssatz

Satz 2.2.1 (Kompaktheitssatz) *Eine L-Theorie T ist konsistent genau dann, wenn jede endliche Teilmenge von T konsistent ist.*

Korollar 2.2.2 *Wenn eine L-Aussage ϕ aus einer L-Theorie T folgt, dann folgt ϕ schon aus einer endlichen Teilmenge von T.*

Bemerkung 2.2.3 *Sei L eine Sprache und sei X die Menge all derjenigen vollständigen L-Theorien T, bei denen aus $T \models \phi$ bereits $\phi \in T$ folgt.[11] Man kann X als topologischen Raum auffassen, bei dem eine Teilmenge $Y \subseteq X$ abgeschlossen ist genau dann, wenn eine (möglicherweise unvollständige) Theorie T' existiert mit $Y = \{T \in X \mid T' \subseteq T\}$. Der Kompaktheitssatz besagt dann genau, dass X kompakt ist.*

Bemerkung zur Bemerkung: Wie in der Analysis hat man: Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ ist abgeschlossen, wenn jeder Limes von Elementen aus Y wieder in Y liegt... wenn man „Limes" als „Ultraprodukt" interpretiert; also genauer: Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ ist ageschlossen genau dann, wenn gilt: Sind $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ L-Strukturen mit $\mathrm{Th}(\mathcal{M}_i) \in Y$, und ist $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf I, so ist auch $\mathrm{Th}(\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i/\mathcal{U}) \in Y$.

Beispiel-Anwendung 2.2.4 *Auf jeder Menge existiert eine Ordnungsrelation.*

Beispiel-Anwendung 2.2.5 (Satz von Ramsey) *Seien $C, m \geq 1$ gegeben. Dann existiert eine natürliche Zahl n mit folgender Eigenschaft: Ist G ein vollständiger Graph mit n Knoten, dessen Kanten mit C Farben gefärbt sind, so existiert eine m-elementige Teilmenge $H \subseteq G$, so dass alle Kanten in H die gleiche Farbe haben.*

Definition 2.2.6 *Sei $\mathcal{M}$ eine L-Struktur, sei $\underline{x}$ ein Tupel von Variablen, und sei Σ eine Menge von Formeln in $\underline{x}$. Σ heißt* ***endlich erfüllbar*** *(in $\mathcal{M}$), wenn für jede endliche Teilmenge $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ ein $\underline{a} \in M^n$ existiert, so dass für alle*

[10]Ein **Primzahlzwilling** ist ein Paar von Primzahlen p_1, p_2 mit $p_2 = p_1 + 1$.

[11]Wir stellen diese Forderung, damit in X nicht verschiedene aber äquivalente Theorien liegen.

$\phi(\underline{x}) \in \Sigma_0$ gilt: $\mathcal{M} \models \phi(\underline{a})$. Existiert ein $\underline{a} \in M^n$, so dass $\mathcal{M} \models \phi(\underline{a})$ für alle $\phi(\underline{x}) \in \Sigma$ gilt, so sagt man $\underline{a}$ ***realisiert*** *Σ (und Σ ist in $\mathcal{M}$* ***erfüllbar*** *oder* ***realisiert****).*

Korollar 2.2.7 *Sei $\mathcal{M}$ eine L-Struktur und Σ eine endlich erfüllbare Menge von L-Formeln. Dann existiert eine elementar äquivalente Struktur $\mathcal{M}' \equiv \mathcal{M}$, in der Σ realisiert ist.*

2.3 Elementare Erweiterungen

Definition 2.3.1 *Seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ L-Strukturen.*

(a) *Eine Abbildung $\alpha\colon M \to N$ heißt* ***elementare Einbettung****, wenn für jede L-Formel $\phi(\underline{x})$ und jedes Tupel $\underline{a} \in M^n$ gilt: $\mathcal{M} \models \phi(\underline{a})$ genau dann, wenn $\mathcal{N} \models \phi(\alpha(\underline{a}))$.*

(b) *Ist $M \subseteq N$ und ist die Inklusionsabbildung von M nach N eine elementare Abbildung, so nennt man $\mathcal{M}$ eine* ***elementare Unterstruktur*** *von $\mathcal{N}$ und $\mathcal{N}$ eine* ***elementare Erweiterung*** *von $\mathcal{M}$. Notation dafür: $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ (oder $\mathcal{M} \prec_L \mathcal{N}$).*

Bemerkung: Anders ausgedrückt: Eine Unterstruktur $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ ist eine elementare Unterstruktur, wenn für jede L-Formel $\phi(\underline{x})$ und jedes Tupel $\underline{a} \in M^n$ gilt: $\mathcal{M} \models \phi(\underline{a}) \iff \mathcal{N} \models \phi(\underline{a})$.

Bemerkung 2.3.2 (a) *Für L-Strukturen $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ gilt: $\mathcal{M}$ ist eine elementare Unterstruktur von $\mathcal{N}$ genau dann, wenn $\mathcal{M} \equiv_{L(M)} \mathcal{N}$ gilt.*

(b) *Sind $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ L-Strukturen mit $\mathcal{N} \models \mathrm{Th}_{L(M)}(\mathcal{M})$, so erhalten wir eine natürliche elementare Einbettung $\mathcal{M} \to \mathcal{N}$.*

Beispiel 2.3.3 *Ist $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}^I/\mathcal{U}$ eine Ultrapotenz einer L-Struktur $\mathcal{M}$ (die wir wie in Notation 2.1.15 als Obermenge von $\mathcal{M}$ auffassen), so ist $\mathcal{M}^*$ eine elementare Erweiterung von $\mathcal{M}$.*

Bemerkung 2.3.4 *Sei $\mathcal{M}$ eine L-Struktur und Σ eine endlich erfüllbare Menge von L-Formeln. Wenn man Korollar 2.2.7 in der Sprache $L(M)$ anwendet, erhält man eine elementare Erweiterung $\mathcal{M}' \succ \mathcal{M}$, in der Σ realisiert ist.*

Lemma 2.3.5 *Jede unendliche L-Struktur $\mathcal{M}$ hat beliebig große elementare Erweiterungen, im Sinne von: Ist A eine beliebige Menge, so existiert eine elementare Erweiterung $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$, in die sich A injektiv einbetten lässt.*

Lemma 2.3.6 *Seien $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_2$ L-Strukturen.*

(a) *Aus $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_2$ folgt $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}_2$.*

(b) *Aus $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}_2$ und $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_2$ folgt $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}_1$.*

Satz 2.3.7 (Tarski-Test) *Sei $\mathcal{N}$ eine L-Struktur. Eine Teilmenge $M \subseteq N$ ist genau dann Träger einer elementaren Unterstruktur von $\mathcal{N}$, wenn für jede $L(M)$-Formel $\phi(x)$ gilt: Wenn ein $a \in N$ existiert mit $\mathcal{N} \models \phi(a)$, dann existiert schon ein $a' \in M$ mit $\mathcal{N} \models \phi(a')$.*

Satz 2.3.8 (Löwenheim-Skolem) *Sei $\mathcal{M}$ eine unendliche L-Struktur. Dann existiert für jede Kardinalzahl $\kappa \geq \max\{|L|, \aleph_0\}$ eine L-Struktur $\mathcal{N}$ der Kardinalität κ mit:*

(a) *falls $\kappa \geq |M|$: $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ („Löwenheim-Skolem aufwärts")*
(b) *falls $\kappa \leq |M|$: $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$ („Löwenheim-Skolem abwärts")*

Vorgriff: Wir werden demnächst die *Kardinalität* $|A|$ von beliebigen (auch unendlichen) Mengen A definieren. Sie hat folgende Eigenschaften:

(a) Die Kardinalität einer Menge ist eine *Kardinalzahl*. (Was das ist, werden wir auch definieren.) Jede natürliche Zahl ist eine Kardinalzahl. Die Kardinalität von abzählbaren Mengen wird mit $\aleph_0$ bezeichnet.
(b) $|A| = |B|$ genau dann, wenn eine Bijektion zwischen A und B existiert.
(c) $|A| \leq |B|$ genau dann, wenn eine Injektion von A nach B existiert. Wenn A nicht leer ist, ist das auch äquivalent dazu, dass eine Surjektion von B nach A existiert.
(d) Sind A und B Mengen, von denen mindestens eine unendlich ist, so gilt $|A \cup B| = \max\{|A|, |B|\}$. Sind beide Mengen nicht-leer, so gilt außerdem $|A \times B| = \max\{|A|, |B|\}$.

Lemma 2.3.9 *Sei $\kappa \geq \aleph_0$ eine unendliche Kardinalzahl und seien I und A_i Mengen, für $i \in I$, mit $|I| \leq \kappa$ und $|A_i| \leq \kappa$ für alle $i \in I$. Dann ist auch $|\bigcup_{i \in I} A_i| \leq \kappa$.*

Lemma 2.3.10 *Ist L eine Sprache, so gibt es $\max\{|L|, \aleph_0\}$ verschiedene L-Formeln (bis auf Umbenennung der Variablen).*

2.4 Vaughts Test und Anwendungen

Satz 2.4.1 (Vaughts Test) *Sei T eine konsistente Theorie ohne endliche Modelle. Wenn eine Kardinalzahl $\kappa \geq \max\{|L|, \aleph_0\}$ existiert, so dass alle Modelle von T der Kardinalität κ isomorph sind, dann ist T vollständig.*

Satz 2.4.2 *Sei K ein Körper. Die $L_{K\text{-VR}}$-Theorie der unendlichen K-Vektorräume ist vollständig.*

Satz 2.4.3 *Sei p entweder 0 oder eine Primzahl. Die Theorie der algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik p ist vollständig. (Diese Theorie wird mit ACF_p bezeichnet.)*

Definition 2.4.4 *Seien $K_0 \subseteq K$ Körper. Eine Teilmenge $A \subseteq K$ heißt* ***algebraisch abhängig*** *über K_0, wenn ein Polynom $f(\underline{x}) \in K_0[\underline{x}] \setminus \{0\}$ existiert und paarweise verschiedene $a_1, \dots, a_n \in A$, so dass $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ ist. Ist dies nicht der Fall, so nennt man A* ***algebraisch unabhängig*** *über K_0.*

Bemerkung: Eine ein-elementige Menge $\{a\} \subseteq K$ ist algebraisch unabhängig über K_0 genau dann, wenn a transzendent über K_0 ist.

Satz 2.4.5 *Seien $K_0 \subseteq K$ Körper. Dann existiert eine über K_0 algebraisch unabhängige Menge $A \subseteq K$, so dass die Körpererweiterung $K/K_0(A)$ algebraisch ist.*

Definition 2.4.6 *Sind K_0, K und A wie in Satz 2.4.5, so nennt man A eine* ***Transzendenzbasis*** *von K über K_0. Ist K_0 der Primkörper von K, so nennt man A auch einfach nur* ***Transzendenzbasis*** *von K.*

Lemma 2.4.7 *Sind $K_0 \subseteq K$ unendliche Körper und ist A eine Transzendenzbasis von K über K_0, so ist $|K| = \max\{|K_0|, |A|\}$.*

Lemma 2.4.8 *Seien $K_0 \subseteq K$ Körper. Wir nehmen an, dass eine über K_0 algebraisch unabhängige Teilmenge $A \subseteq K$ existiert, so dass $K = K_0(A)$ ist. Dann ist K und $K_0((x_a)_{a\in A})$ isomorph über K_0.*[12]

Korollar 2.4.9 *Seien K und K' algebraisch abgeschlossene Körper, die einen gemeinsamen Unterkörper K_0 besitzen und seien $A \subseteq K$ und $A \subseteq K'$ Transzendenzbasen von K bzw. K' über K_0. Ist $|A| = |A'|$, so sind K und K' über K_0 isomorph.*

Korollar 2.4.10 *Sei ϕ eine L_{ring}-Aussage. Dann sind äquivalent:*

(a) *Es existiert ein algebraisch abgeschlossener Körper K der Charakteristik 0 mit $K \models \phi$.*
(b) *Für alle algebraisch abgeschlossenen Körper K der Charakteristik 0 gilt $K \models \phi$.*
(c) *Es gibt algebraisch abgeschlossene Körper K beliebig großer positiver Charakteristik mit $K \models \phi$.*
(d) *Für alle abgeschlossenen Körper K hinreichend großer positiver Charakteristik gilt $K \models \phi$.*

Satz 2.4.11 *Sei $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ eine injektive polynomiale Abbildung. Dann ist f auch surjektiv.*

3 Einschub über Mengen

3.1 Ordinalzahlen und das Zornsche Lemma

Konvention 3.1.1 (a) *Wie wir in Lemma 1.6.5 gesehen haben, ist nicht jede Zusammenfassung von mathematischen Objekten eine Menge. Möchte man trotzdem über solche Zusammenfassungen sprechen, so nennt man sie* ***Klassen****.*

(b) *Eine Möglichkeit, den Begriff einer Klasse präzise zu machen ist: Eine Klasse ist in Wirklichkeit eine $L_{\text{Me}}(A)$-Formel $\phi(x)$ (für eine beliebige Parametermenge A), aber man behandelt sie notationell wie eine Menge:*

[12] Erinnerung: Zwei Körper K, K' mit einem gemeinsamen Unterkörper K_0 heißen **isomorph über** K_0, wenn ein Isomorphismus $K \to K'$ existiert, der auf K_0 die Identität ist.

Man schreibt $K := \{\underline{x} \mid \phi(\underline{x})\}$ für die Klasse, die der Formel $\phi(\underline{x})$ entspricht; „$\underline{a} \in K$" bedeutet, dass $\phi(\underline{a})$ gilt; ist $K' := \{\underline{a} \mid \phi'(\underline{a})\}$, so steht $K \cap K'$ für die Klasse, die durch $\phi \wedge \phi'$ gegeben ist, und $K \subseteq K'$ bedeutet $\forall \underline{x}\colon (\phi(\underline{x}) \to \phi'(\underline{x}))$; etc.

(c) *Eine Klasse, die keine Menge ist, nennt man auch eine **echte Klasse**.*

(d) *Wenn wir in ZFC arbeiten, fassen wir eine Funktion $f\colon X \to Y$ als Menge auf, indem wir sie mit ihrem Graph identifizieren. Wenn X und/oder Y eine Klasse ist, machen wir dies auch; der Graph von f ist dann auch eine Klasse. Man nennt f dann manchmal eine **klassengroße Funktion** oder auch **Funktional**.*

Bemerkung 3.1.2 (a) *Der wichtigste Unterschied zwischen Mengen und Klassen ist: Eine Klasse kann nicht Element einer Menge (oder einer anderen Klasse) sein.*

(b) *Ist M eine Menge und $K \subseteq M$ eine Klasse, so ist K auch eine Menge.*

(c) *Ist M eine Menge, K eine Klasse und $f\colon M \to K$ eine (klassengroße) Bijektion, so ist auch K eine Menge.*

Definition 3.1.3 *Eine Menge α heißt **Ordinalzahl**, wenn gilt:*

(a) *Für alle $\beta \in \alpha$ ist $\beta \subseteq \alpha$.*

(b) *Für alle $\beta, \beta' \in \alpha$ gilt: $\beta \in \beta'$ oder $\beta' \in \beta$ oder $\beta = \beta'$.*

Wir schreiben On *für die Klasse aller Ordinalzahlen. Für $\alpha, \beta \in \mathrm{On}$ definieren wir dass $\alpha < \beta$ ist, falls $\alpha \in \beta$ ist. Den **Nachfolger** einer Ordinalzahl α definieren wir durch $s(\alpha) := \alpha \cup \{\alpha\}$.*

Lemma 3.1.4 *Für jede Ordinalzahl α gilt:*

(a) *Alle Elemente von α sind auch Ordinalzahlen. Insbesondere ist $\alpha = \{\beta \in \mathrm{On} \mid \beta < \alpha\}$.*

(b) *$s(\alpha)$ ist auch eine Ordinalzahl.*

Notation 3.1.5 (a) *Wenn wir natürliche Zahlen wie in Bemerkung 1.6.7 als Mengen auffassen (d. h. n wird mit $\{0, \dots, n-1\}$ identifiziert), dann ist jede natürliche Zahl eine Ordinalzahl. Wir werden auf diese Art $\mathbb{N}$ als Teilmenge von* On *auffassen.*

(b) *Die Menge aller natürilchen Zahlen wird auf diese Art auch eine Ordinalzahl. Diese Ordinalzahl nennen wir ω.*

Definition 3.1.6 *Eine **Wohlordnung** auf einer Menge oder Klasse M ist eine Ordnungsrelation $<$, so dass jede nicht-leere Teilmenge oder Teilklasse $A \subseteq M$ ein Minimum besitzt. Wir sagen auch, M ist (durch $<$) **wohlgeordnet**.*

Satz 3.1.7 On *ist durch $<$ wohlgeordnet.*

Bemerkung 3.1.8 *Aus Satz 3.1.7 folgt, dass* On *ist eine echte Klasse ist.*

Bemerkung 3.1.9 *Sei M eine Menge von Ordinalzahlen. Dann ist auch $\alpha := \bigcup_{\beta \in M} \beta$ eine Ordinalzahl, und zwar das Supremum von M (d. h. α ist die kleinste Ordinalzahl mit $\alpha \geq \beta$ für alle $\beta \in M$).*

Definition 3.1.10 *Eine Ordinalzahl $\alpha \neq 0$ nennt man* ***Nachfolger-Ordinalzahl****, wenn $\alpha = s(\beta)$ für ein $\beta \in \mathrm{On}$ ist; sonst nennt man α* ***Limes-Ordinalzahl****. (0 ist weder Nachfolger noch Limes.)*

Bemerkung: Eine Ordinalzahl $\alpha > 0$ ist Limes-Ordinalzahl genau dann, wenn $\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \beta$ ist.

Satz 3.1.11 (Transfinite rekursive Definition) *Eine Funktion $f\colon \mathrm{On} \to M$ (für eine beliebige Menge oder Klasse M) lässt sich eindeutig dadurch charakterisieren, dass man für jede Ordinalzahl α angibt, was $f(\alpha)$ sein soll, wenn $f(\beta)$ bereits für alle $\beta < \alpha$ festgelegt sind.*

Der Satz lässt sich wie folgt formaler formulieren: Wir nehmen an, dass für jede Ordinalzahl α eine Funktion $h_\alpha\colon \mathrm{Abb}(\alpha, M) \to M$ gegeben ist. Dann existiert genau eine Funktion $f\colon \mathrm{On} \to M$, so dass für alle $\alpha \in \mathrm{On}$ gilt: $f(\alpha) = h_\alpha(f|_\alpha)$.

Satz 3.1.12 *Jede wohlgeordnete Menge $(M, <)$ ist zu genau einer Ordinalzahl ordnungsisomorph, d. h. es existiert genau eine Ordinalzahl α, so dass eine ordnungserhaltende Bijektion $M \to \alpha$ existiert. Dieser ordnungsisomorphismus ist außerdem eindeutig.*

Satz 3.1.13 (Wohlordnungssatz) *Jede Menge steht in Bijektion zu einer Ordinalzahl. Insbesondere gibt es auf jeder Menge eine Wohlordnung.*

Satz 3.1.14 (Zornsches Lemma) *Ist $(M, \preceq)$ eine nicht-leere partiell geordnete Menge, so dass jede Kette eine obere Schranke besitzt, so besitzt M ein Maximum.*

3.2 Kardinalzahlen

Definition 3.2.1 (a) *Die* ***Kardinalität*** *$|M|$ einer Menge M ist die kleinste Ordinalzahl α, so dass es eine Bijektion zwischen M und α gibt.*
(b) *Eine* ***Kardinalzahl*** *ist eine Ordinalzahl α, für die $|\alpha| = \alpha$ gilt.*

Bemerkung: Unendliche Nachfolgerordinalzahlen sind keine Kardinalzahlen.

Satz 3.2.2 *Für Mengen M, M' gilt $|M| \leq |M'|$ genau dann, wenn eine Injektion $M \to M'$ existiert.*

Korollar 3.2.3 *Für beliebige Mengen M, M' gilt:*

(a) *In mindestens eine Richtung ($M \to M'$ oder $M' \to M$) existiert eine Injektion.*
(b) *Existiert in beide Richtungen eine Injektion, so existiert auch eine Bijektion $M \to M'$.*

Korollar 3.2.4 *Für nicht-leere Mengen M, M' gilt $|M| \leq |M'|$ genau dann, wenn eine Surjektion $M' \to M$ existiert.*

Lemma 3.2.5 *Für jede Menge M gilt: $|\mathcal{P}(M)| > |M|$.*

Lemma 3.2.6 *Ist M eine Menge von Kardinalzahlen, so ist auch $\bigcup_{\kappa \in M} \kappa = \sup M$ eine Kardinalzahl.*

Definition 3.2.7 *Für unendliche Kardinalzahlen verwendet man die folgende Notation: Für Ordinalzahlen α definieren wir rekursiv: $\aleph_\alpha$ ist die kleinste unendliche Kardinalzahl, die größer ist als $\aleph_\beta$ für alle $\beta < \alpha$. (Insbesondere ist $\aleph_0$ die kleinste unendliche Kardinalzahl, also $\aleph_0 = \omega$.)*

Bemerkung 3.2.8 *Für Limes-Ordinalzahlen λ gilt: $\aleph_\lambda = \bigcup_{\beta < \lambda} \aleph_\beta$.*

Definition 3.2.9 *Seien M, N disjunkte Mengen mit Kardinalitäten $|M| = \kappa$, $|N| = \mu$. Wir definieren:*

(a) $\kappa + \mu := |M \cup N|$
(b) $\kappa \cdot \mu := |M \times N|$
(c) $\kappa^\mu := |\operatorname{Abb}(N, M)|$

Beispiel 3.2.10 $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0}$.

Satz 3.2.11 *Für unendliche Kardinalzahlen κ, μ gilt: $\kappa + \mu = \kappa \cdot \mu = \max\{\kappa, \mu\}$.*

Bemerkung 3.2. *Die **Kontinuumshypothese** „$2^{\aleph_0} = \aleph_1$" lässt sich in* ZFC *weder beweisen noch widerlegen.*

Definition 3.2. *Die **von-Neumann-Hierarchie** V_α, für $\alpha \in \mathrm{On}$ ist wie folgt definiert: $V_0 := \emptyset$; $V_{s(\beta)} := \mathcal{P}(V_\beta)$; und für Limes-Ordinalzahlen λ: $V_\lambda := \bigcup_{\beta < \lambda} V_\beta$.*

Satz 3.2. $\bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha$ *ist die Klasse aller Mengen.*

Definition 3.2. *Eine Kardinalzahl κ heißt **stark unerreichbar**, wenn gilt:*

(a) $\kappa > \omega$
(b) *Für alle $\mu < \kappa$ gilt $2^\mu < \kappa$.*
(c) *Ist $M \subseteq \kappa$ mit $|M| < \kappa$, so ist $\sup M < \kappa$.*

Satz 3.2. *Ist κ stark unerreichbar, so ist V_κ ein Modell von* ZFC.

4 Quantorenelimination und Anwendungen

4.1 Quantorenelimination

Sei L eine Sprache.

Definition 4.1.1 (a) *Erinnerung: Eine* ***atomare Formel*** *ist eine Formel der Form (i), (ii) oder (iii) aus Definition 1.2.1 (b).*

(b) *Ein* ***Literal*** *ist eine Formel die entweder atomar ist oder die Negation einer atomaren Formel ist.*

(c) *Eine* ***quantorenfreie Formel*** *ist eine Formel, in der keine Quantoren vorkommen, die also in Definition 1.2.1 (b) nur (i)–(v) verwendet.*

Eine Formel, die sich durch Negation und Konjunktion[13] aus anderen Formeln ergibt, nennt man auch eine **boolsche Kombination** dieser anderen Formeln. Eine Formel ist also quantorenfrei genau dann, wenn sie eine boolsche Kombintation von atomaren Formeln ist.

Bemerkung 4.1.2 *Jede quantorenfreie Formel $\phi(\underline{x})$ ist äquivalent zu einer Formel der Form*

$$\bigwedge_{i=1}^{k_1} \phi_{1,i}(\underline{x}) \quad \vee \quad \dots \quad \vee \quad \bigwedge_{i=1}^{k_\ell} \phi_{\ell,i}(\underline{x}),$$

wobei jedes $\phi_{\ell,i}(\underline{x})$ ein Literal ist. (Dies nennt man eine ***disjunktive Normalform*** *von $\phi(\underline{x})$.)*

Bemerkung 4.1.3 *Sei $\phi(\underline{x})$ eine quantorenfreie L-Formel, sei $\alpha\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ eine Einbettung von L-Strukturen und sei $\underline{a} \in M^n$. Dann gilt $\mathcal{M} \models \phi(\underline{a}) \iff \mathcal{N} \models \phi(\alpha(\underline{a}))$. Insbesondere gilt im Fall $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$: $\mathcal{M} \models \phi(\underline{a}) \iff \mathcal{N} \models \phi(\underline{a})$.*

Definition 4.1.4 *Eine L-Theorie T hat* ***Quantoren-Elimination*** *(oder „eliminiert Quantoren"), wenn jede L-Formel $\phi(\underline{x})$ modulo T zu einer quantorenfreien L-Formel $\psi(\underline{x})$ äquivalent ist, d. h. wenn gilt: $T \models \forall \underline{x}\colon (\phi(\underline{x}) \leftrightarrow \psi(\underline{x}))$. Eine L-Struktur $\mathcal{M}$ hat* ***Quantoren-Elimination****, wenn ihre Theorie* $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ *Quantorenelimination hat.*

Satz 4.1.5 *Sei T eine L-Theorie. Wenn jede Formel $\phi(\underline{x})$ der folgenden Form modulo T zu einer quantorenfreien L-Formel äquivalent ist, hat T Quantoren-Elimination:*

$$\phi(\underline{x}) = \exists y\colon \psi(\underline{x}, y),$$

wobei $\psi(\underline{x}, y)$ eine Konjunktion von Literalen ist und y in jedem der Literale vorkommt.

Beispiel 4.1.6 *Sei $L = \{<\}$ und sei* DLO[14] *die Theorie der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte, d. h.* DLO *besteht aus den folgenden L-Aussagen:*

[13] Üblicherweise erlaubt man auch Disjunktion, aber das lässt sich ja auch mit Negation und Konjunktion ausdrücken.

[14] DLO steht für <u>d</u>ense <u>l</u>inear <u>o</u>rder.

(a) $<$ *ist eine Ordnungsrelation.*
(b) $\forall x, x'\colon (x < x' \to \exists y\colon x < y < x')$
(c) $\forall x\colon \exists y, y'\colon y < x < y'$.
(d) $\exists x\colon \neg\bot$.

DLO *eliminiert Quantoren.*

Beispiel 4.1.7 *Sei* $L = L_{\mathrm{agrp}} \cup \{<\}$ *und sei* DOAG[15] *die Theorie der nicht-trivialen disisiblen angeordneten abelschen Gruppen, d. h.* DOAG *besteht aus den folgenden L-Aussagen:*

(a) $0, +, -$ *definiert eine abelsche Gruppe.*
(b) *Die Gruppe ist nicht-trivial, d. h.* $\exists x\colon x \neq 0$.
(c) *Die Gruppe ist divisibel, d. h. für jede natürliche Zahl* $n \geq 1$ *gilt:* $\forall x\colon \exists y\colon ny = x$.
(d) $<$ *ist eine Ordnungsrelation.*
(e) *Die Ordnungsrelation ist kompatibel mit der Gruppenverknüpfung, d. h.* $\forall x, x'y\colon x < x' \to x + y < x' + y$.

DOAG *eliminiert Quantoren.*

Beispiel 4.1.8 *In der Sprache* L_{agrp} *hat* $\mathrm{Th}(\mathbb{Z})$ *keine Quantorenelimination, da z. B.* $2\mathbb{Z}$ *nicht ohne Quantoren definierbar ist. Setzt man jedoch* $L := L_{\mathrm{agrp}} \cup \{P_n \mid n \geq 2\}$*, wobei* P_n *ein Prädikat ist, das die Menge der durch* n *teilbaren Zahlen definiert, so hat* $\mathrm{Th}_L(\mathbb{Z})$ *Quantorenelimination.*

Satz 4.1.9 *Sei* T *eine konsistente L-Theorie mit Quantoren-Elinination. Wir nehmen außerdem an, dass es eine L-Struktur* $\mathcal{A}$ *gibt (nicht notwendigerweise ein Modell von* T*), die sich in jedes Modell von* T *einbetten lässt. Dann ist* T *vollständig.*

Beispiel 4.1.10 DLO *und* DOAG *sind vollständig.*

Satz 4.1.11 *Ist* T *eine L-Theorie mit Quantoren-Elimination, ist* $\mathcal{M}$ *ein Modell von* T*, und ist* $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{M}$ *eine Unterstruktur, die auch ein Modell von* T *ist, so ist* $\mathcal{M}'$ *schon eine elementare Unterstruktur von* $\mathcal{M}$.

4.2 Ein Kriterium für Quantorenelimination

Sei weiterhin L eine Sprache.

Lemma 4.2.1 (Trennungslemma) *Seien* T_1, T_2 *L-Theorien. Wir nehmen an, dass sich jedes Paar von Modellen* $\mathcal{M}_1 \models T_1, \mathcal{M}_2 \models T_2$ *durch eine quantorenfreie L-Aussage* $\phi_{\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2}$ *„trennen" lässt, d. h.* $\mathcal{M}_1 \models \phi_{\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2}$ *und* $\mathcal{M}_2 \models \neg\phi_{\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2}$. *Dann existiert auch eine quantorenfreie L-Aussage* ϕ*, die* T_1 *und* T_2 *„trennt", d. h. mit* $T_1 \models \phi$ *und* $T_2 \models \neg\phi$.

Definition 4.2.2 *Sei* $\mathcal{M}$ *eine L-Struktur und sei* $A \subseteq M$. *Die von* A ***erzeugte Unterstruktur*** $\langle A\rangle_L$ *von* M *ist die kleinste Unterstruktur von* M*, die* A *enthält:* $\langle A\rangle_L = \{t^{\mathcal{M}}(\underline{a}) \mid t \text{ L-Term}, \underline{a} \in A^n\}$. *Gilt* $\langle A\rangle_L = M$*, so sagt man,* $\mathcal{M}$ *ist*

[15] DOAG steht für divisible ordered abelian group.

von A ***erzeugt****. Eine Struktur $\mathcal{M}$ heißt* ***endlich erzeugt****, wenn sie von einer endlichen Menge erzeugt ist.*

Lemma 4.2.3 *Seien $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ L-Strukturen und seien $\underline{a}_1 \in M_1^n$ und $\underline{a}_2 \in M_2^n$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) Für jede quantorenfreie L-Formel $\phi(\underline{x})$ gilt: $\mathcal{M}_1 \models \phi(\underline{a}_1) \iff \mathcal{M}_2 \models \phi(\underline{a}_2)$.

(ii) Es existiert ein Isomorphismus von $\langle \underline{a}_1 \rangle_L$ nach $\langle \underline{a}_2 \rangle_L$, der $\underline{a}_1$ auf $\underline{a}_2$ abbildet.

Satz 4.2.4 *Eine L-Theorie T hat Quantoren-Elimination genau dann, wenn folgendes gilt:*

Sind $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \models T$ Modelle, $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{M}_1$ und $\mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{M}_2$ endlich erzeugte Unterstrukturen, $\alpha\colon \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ ein Isomorphismus und ist $\psi(\underline{a}, y)$ eine quantorenfreie $L(A_1)$-Formel,[16] *so dass es ein $b_1 \in \mathcal{M}_1$ gibt mit $\mathcal{M}_1 \models \psi(\underline{a}, b_1)$, so gibt es auch ein $b_2 \in \mathcal{M}'$ mit $\mathcal{M}_2 \models \psi(\alpha(\underline{a}), b_2)$.*

Außerdem reicht es, das Kriterium zu überprüfen, wenn ψ eine Konjunktion von Literalen ist.

Korollar 4.2.5 *Eine L-Theorie T hat Quantoren-Elimination genau dann, wenn folgendes gilt:*

Sind $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \models T$ Modelle, sind $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{M}_i$ endlich erzeugte Unterstrukturen, ist $\alpha\colon \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ ein Isomorphismus und ist $b_1 \in \mathcal{M}_1$, so existiert eine elementare Erweiterung $\mathcal{M}_2' \succ \mathcal{M}_2$, so dass sich α zu einer Einbettung $\langle A_1, b_1 \rangle_L \to \mathcal{M}_2'$ fortsetzen lässt.

Beispiel 4.2.6 *Sei K ein Körper, $L_{K\text{-VR}} = \{0, +, -\} \cup \{r\cdot \mid r \in K\}$ die Sprache der K-Vektorräume wie in Beispiel 1.1.7 und sei T die Theorie der K-Vektorräume, die als Menge unendlich sind. Dann hat T Quantoren-Elimination.*

Beispiel 4.2.7 *Die Theorie* ACF *der algebraisch abgeschlossenen Körper (in der Sprache L_{ring}) hat Quantoren-Elimination.*

Beispiel 4.2.8 *Wir erhalten auf diese Art einen (neuen) Beweis von:*

(a) *Für jedes $p \in \mathbb{P} \cup \{0\}$ die Theorie ACF_p der algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik p vollständig.*

(b) *Sind $K \subseteq L$ algebraisch abgeschlossene Körper, so ist bereits L eine elementare Erweiterung von K.*

Bemerkung 4.2.9 *Wenn T Quantoren-Elimination hat und $\mathcal{M}_i, \mathcal{A}_i, \alpha$ wie in Korollar 4.2.5 sind, so kann den Isomorphismus α sogar zu einer Einbettung $\mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2'$ fortsetzen, für eine geeignete elementare Erweiterung $\mathcal{M}_2' \succ \mathcal{M}_2$.*

[16] Gemeint ist: $\psi(\underline{x}, y)$ ist eine quantorenfreie L-Formel und $\underline{a}$ ist ein Tupel aus A_1. (Dadurch wird $\psi(\underline{a}, y)$ zu einer $L(A_1)$-Formel.)

4.3 Reell abgeschlossene Körper

Definition 4.3.1 *Ein* ***angeordneter Ring*** *ist ein Ring R (in dieser Vorlesung: kommutativ und mit 1) mit einer Ordnungsrelation $<$, so dass für alle $a, b, c \in R$ gilt:*

(a) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
(b) $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow ac < bc$.

Ein ***angeordneter Körper*** *ist ein Körper, der ein angeordneter Ring ist. Wir fassen angeordnete Ringe als Strukturen in der Sprache $L_{\mathrm{oring}} := L_{\mathrm{ring}} \cup \{<\}$ auf.*

Bemerkung 4.3.2 *In angeordneten Ringen R gilt für alle $a, b \in R$:*

(a) *$a > 0$ genau dann, wenn $-a < 0$.*
(b) *$a^2 \geq 0$. Insbesondere ist $1 > 0$.*
(c) *$ab > 0$ genau dann, wenn a und b beide positiv oder beide negativ sind.*

Lemma 4.3.3 *Ist R ein angeordneter Ring, so lässt sich die Anordnung auf eindeutige Weise auf den Brüchekörper* $\operatorname{Frac} R$ *fortsetzen.*

Definition 4.3.4 *Ein angeordneter Körper K heißt* ***reell abgeschlossen****, wenn $K(\sqrt{-1})$ algebraisch abgeschlossen ist.*

Bemerkung 4.3.5 *Ist K reell abgeschlossen, so haben alle irreduziblen Polynome in $K[x]$ Grad 1 oder 2.*

Lemma 4.3.6 *Ein angeordneter Körper K ist reell abgeschlossen genau dann, wenn*

(a) *jedes Polynom ungeraden Grades eine Nullstelle in K besitzt; und*
(b) *jedes positive Element von K eine Quadratwurzel in K besitzt.*

Bemerkung 4.3.7 *Auf reell abgeschlossenen Körpern ist die Ordnungsrelation bereits durch die Körperstruktur festgelegt: Es gilt $a \geq b$ genau dann, wenn $a - b$ ein Quadrat ist.*

Definition 4.3.8 *Sei* RCF *die L_{oring}-Theorie der reell abgeschlossenen Körper.*

Satz 4.3.9 *Zu jedem angeordneten Körper K existiert ein angeordneter Körper $L \supseteq K$ mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *L ist reell abgeschlossen.*
(b) *L/K ist eine algebraische Erweiterung.*

Außerdem ist L durch K eindeutig festgelegt (bis auf ordnungserhaltenden Isomorphismus, der auf K die Identität ist).

Definition 4.3.10 *Den Körper L aus Satz 4.3.9 nennt man den* ***reellen Abschluss*** *von K.*

Satz 4.3.11 RCF *hat Quantoren-Elimination.*

Index