Modelltheorie I – Blatt 1

Abgabe am 20.10.2023 in der Vorlesung oder im Ilias

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

Aufgabe 1 (1+2 Punkte):

Sei dafür $\mathcal{M}$ eine L-Struktur und sei $A \subseteq M$. In dieser Aufgabe wollen wir Bemerkung 1.1.6 rechtfertigen, die besagt, dass wir uns bei Realisierungen von Typen über A auf elementare Erweiterungen von $\mathcal{M}$ beschränken können.

(a) Sei $\Sigma(\underline{x})$ eine Menge von $L(A)$-Formeln, die eine Realisierung in einem Modell von $\mathrm{Th}_{L(A)}(\mathcal{M})$ besitzt (also ein partieller Typ im Sinne von Definition 1.1.1). Zeigen Sie, dass $\Sigma(\underline{x})$ dann insbesondere auch eine Realisierung in einer elementaren Erweiterung von $\mathcal{M}$ besitzt.

(b) Sei nun $\Sigma'(\underline{x})$ ein weiterer partieller Typ über A. Wir nehmen an, dass in jeder elementaren Erweiterung $\mathcal{M}' \succ \mathcal{M}$ gilt: Jede Realisierung von $\Sigma(\underline{x})$ ist auch eine Realisierung von $\Sigma'(\underline{x})$. Zeigen Sie, dass dann $\Sigma(\underline{x}) \models \Sigma'(\underline{x})$ gilt.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte):

Sei $T = \mathrm{DLO}$ die Theorie der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte (in der Sprache $L = \{<\}$). Erinnerung: Wir hatten gesehen, dass T Quantorenelimination besitzt.

(a) Bestimmen Sie alle (vollständigen) 1-Typen und 2-Typen von T. (Sie sollten nur einen 1-Typen und drei 2-Typen finden.)

(b) Zeigen Sie, dass T nur endlich viele n-Typen hat, für jedes feste n.

Aufgabe 3 (2+2 Punkte):

Wir arbeiten in der Struktur $(\mathbb{Q}, <)$.

(c) Zeigen Sie, dass über $\mathbb{Q}$ überabzählbar viele 1-Typen existieren. (Hinweis: Betrachten Sie die Typen von Elementen von $\mathbb{R} \succ \mathbb{Q}$. Gibt es verschiedene reelle Zahlen, die den selben Typ über $\mathbb{Q}$ haben?)

(d) Beschreiben Sie alle 1-Typen über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 4 (2+3 Punkte):

Sei L eine abzählbare Sprache, sei $\mathcal{M}$ eine beliebige L-Struktur, und sei $\mathcal{M}^* := \mathcal{M}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ eine Ultrapotenz von $\mathcal{M}$, für einen freien Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf $\mathbb{N}$. Wir wollen zeigen, dass $\mathcal{M}^*$ $\aleph_1$-saturiert ist.

Wir wählen dazu für jedes Element $a \in A$ einen festen Repräsentanten $(a_i)_i \in M^{\mathbb{N}}$ aus. Ist $\underline{a} \in A^n$, so schreiben wir $(\underline{a}_i)_i \in (M^n)^{\mathbb{N}}$ für die Repräsentanten-Folge des Tupels.

(a) Zeigen Sie: Ist $\phi(x, \underline{a}) \in p$, für eine L-Formel $\phi(x, \underline{y})$ und $\underline{a} \in A^n$, so existiert für fast alle i eine Realisierung von $\phi(x, \underline{a}_i)$ in $\mathcal{M}$. Hierbei ist „fast alle“ im Sinne von $\mathcal{U}$ gemeint; also formal: Die Menge der $i \in \mathbb{N}$, so dass $\phi(x, \underline{a}_i)$ eine Realisierung in $\mathcal{M}$ hat, ist ein Element von $\mathcal{U}$.

(b) Seien nun $\phi_i(x)$ ($i \in \mathbb{N}$) alle Formeln in $p(x)$. Wir setzen $\psi_i(x) := \phi_0(x) \wedge \cdots \wedge \phi_i(x)$ und wählen dann $b_i \in M$ wie folgt: Schreibe $\psi_i(x) = \psi_i(x, \underline{a})$ wie in Teil (a). Hat $\psi_i(x, \underline{a}_i)$ eine Realisierung in M, so sei b_i eine beliebige solche Realisierung. Hat $\psi_i(x, \underline{a}_i)$ keine Realisierung in M, so sei b_i ganz belieibig. Zeigen Sie, dass $(b_i)_i$ der Repräsentant (in $\mathcal{M}^*$) einer Realisierung von p ist.