Modelltheorie I – Blatt 11

Abgabe am 19.1.2024 in der Vorlesung oder im Ilias bis 10:30

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

Aufgabe 1 (2+2 Punkte):

Sei L eine beliebige Sprache. Zeigen Sie:

(a) Sind $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}'$ elementar äquivalente L-Strukturen, $\phi(\underline{x}, \underline{y})$ eine L-Formel, und $\underline{a} \in M^n, \underline{a}' \in (M')^n$ Tupel mit $\operatorname{tp}(\underline{a}) = \operatorname{tp}(\underline{a}')$, so ist $\operatorname{MR}(\phi(\mathcal{M}, \underline{a})) = \operatorname{MR}(\phi(\mathcal{M}', \underline{a}'))$.

(b) Es existiert eine Ordinalzahl α (die nur von L abhängt), so dass für jede L-Struktur $\mathcal{M}$ und jede definierbare Menge $X \subseteq M^n$ gilt: Ist $\operatorname{MR}(X) \neq \infty$, so ist bereits $\operatorname{MR}(X) < \alpha$.
Hinweis: Wie viele verschiedene Morley-Ränge kann es überhaupt geben?

Aufgabe 2 (3+3 Punkte):

Sei $\mathcal{M}$ $\aleph_0$-saturiert, seien $X \subseteq M^n$ und $Y \subseteq M^m$ definierbare Mengen und sei $f\colon X \to Y$ eine definierbare Abbildung. Wir nehmen an, dass jede Faser von f den gleichen Morley-Rang $\operatorname{MR}(f^{-1}(\underline{b})) = \beta \in \mathrm{On}$ hat. (Insbesondere ist f surjektiv.)

(a) Zeigen Sie: Ist $\operatorname{MR}(Y) \in \mathbb{N}$ und $\beta \in \mathbb{N}$, so so ist $\operatorname{MR}(X) \geq \operatorname{MR}(Y) + \beta$.

(b) Geben Sie zwei Beispiele mit $\beta = 1$ und $\operatorname{MR}(Y) = \omega$ an: eins mit $\operatorname{MR}(X) = \omega$ und eins mit $\operatorname{MR}(X) = \omega + 1$.

Aufgabe 3 (2+2+2 Punkte):

Sei X eine definierbare Menge, sei $\beta \in \mathrm{On}$ und seien $X_i \subseteq X$ (für $i \in \mathbb{N}$) definierbare Teilmengen mit $\operatorname{MR}(X_i) = \beta$ und mit der Eigenschaft, dass jedes $a \in X$ in höchstens zwei der Mengen X_i liegt. Zeigen Sie:

(a) Es existieren nur endlich viele i, so dass $\operatorname{MR}(X_i \setminus X_1) < \beta$ ist.

(b) $\operatorname{MR}(X) \geq \beta + 1$.
Hinweis: Wenn Sie unendlich viele disjunkte Teilmengen von X finden möchten, die Morley-Rang β haben, können Sie ja mal mit X_1 anfangen und dann (a) anwenden...

(c) Sind X und Y beliebige definierbare Mengen und ist $f\colon X \to Y$ eine surjektive definierbare Abbildung, so dass jede Faser $f^{-1}(\underline{a})$ (für $\underline{a} \in Y$) höchtens zwei Elemente hat, so gilt $\operatorname{MR}(X) = \operatorname{MR}(Y)$.
Anmerkung: Statt „$|f^{-1}(\underline{a})| \leq 2$“ reicht es zu fordern, dass alle Fasern endlich sind. (Anders ausgedrückt: In Aufgabe 2 habe: $\beta = 0 \Rightarrow \operatorname{MR}(X) = \operatorname{MR}(Y)$.) Wenn Sie Spaß an kombinatorischem Gebastel haben, können Sie das auch noch zeigen.