Modelltheorie I – Blatt 12

Abgabe am 26.1.2024 in der Vorlesung oder im Ilias bis 10:30

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

Aufgabe 1 (2+2+2 Punkte):

Sei L eine höchstens abzählbare Sprache und T eine total transzendente Theorie.

Zeigen Sie:

(a) T besitzt ein abzählbares $\aleph_0$-saturiertes Modell.
Hinweis: Auch wenn hier nur Typen über endlichen Mengen realisiert werden sollen, kann es nützlich sein, $\aleph_0$-Stabilität zu verwenden.

(b) Ist X eine beliebige definierbare Menge (in einem beliebigen Modell von T), so ist $\mathrm{MR}(X) < \aleph_1$.
Hinweis: Sie können Aufgabe 1 (a) von Blatt 11 verwenden.

(c) Die Schranke $\aleph_1$ aus (b) ist best-möglich, d. h. für jede Ordinalzahl $\beta < \aleph_1$ existiert eine abzählbare Sprache L, eine L-Struktur $\mathcal{M}$ mit total transzendenter Theorie und eine definibare Menge X in $\mathcal{M}$ mit $\mathrm{MR}(X) = \beta$.
Hinweis: Ein möglicher Ansatz besteht darin, geeignete Äquivalenzrelationen zu definieren.

Aufgabe 2 (2+4 Punkte):

Sei L die Sprache bestehend aus zwei Sorten P und O und einem Relationssymbol $\dot{\in} \subseteq P \times O$. Wir fassen einen topologischen Raum X wie folgt als L-Struktur $\mathcal{M}$ auf: $P^{\mathcal{M}} = X$ ist die Menge der Punkte des topologischen Raums; $O^{\mathcal{M}}$ ist die Menge der offenen Teilmengen von X; und $p \mathrel{\dot{\in}^{\mathcal{M}}} u$ besagt, dass der Punkt $p \in X$ in der offenen Menge $u \subseteq X$ liegt. Wir betrachten nun eine $|\mathcal{M}|^+$-saturierte elementare Erweiterung $\mathcal{M}^* \succ \mathcal{M}$ in dieser Sprache, und wir schreiben $X^* := P^{\mathcal{M}^*}$ für die entsprechende Punktmenge.

Wir sagen, dass ein Punkt $p' \in X^*$ *unendlich nah* an einem Punkt $p \in X$ liegt, wenn für jede offene Umgebung $u \in O^{\mathcal{M}}$ von p gilt: $p' \mathrel{\dot{\in}} u$. (Hierbei ist „$p' \mathrel{\dot{\in}} u$“ eine Aussage in $\mathcal{M}^*$; wir verwenden $u \in O^{\mathcal{M}} \subseteq O^{\mathcal{M}^*}$.)

Zeigen Sie:

(a) Ein Punkt $p \in X$ ist isoliert genau dann, wenn der einzige Punkt $p' \in X^*$, der unendlich nah an p liegt, p selbst ist.

(b) X ist kompakt genau dann, wenn „kein Punkt von X^* weit weg von X liegt“, also genauer: wenn jedes $p' \in X^*$ unendlich nah an (mindestens) einem $p \in X$ liegt.
Hinweis für eine Richtung: Aus einer offenen Überdeckung von X, die keine endliche Teilüberdeckung hat, lässt sich ein partieller Typ konstruieren, der besagt, dass ein Punkt in keiner der Mengen der offenen Überdeckung liegt.
Hinweis für die andere Richtung: Ist $p' \in X^*$ weit weg von jedem Punkt von X, so erhält man daraus auf naheliegende Weise eine Überdeckung von X...

Anmerkung: Um eine bessere Anschauung zu bekommen, können Sie sich z. B. $X = \mathbb{R}$ oder $X = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ vorstellen.

Aufgabe 3 (3+1 Punkte):

(a) Sei L eine Sprache mit endlich vielen Sorten und T eine L-Theorie. Geben Sie eine einsortige Sprache L' und eine L'-Theorie T' an, so dass eine Bijektion existiert, die jedem Modell $\mathcal{M} \models T$ ein Modell $\mathcal{M}' \models T'$ zuornet mit folgenden Eigenschaften:
- $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ haben die gleiche Grundmenge $M = M'$.
- Eine Menge $X \subseteq S_1^{\mathcal{M}} \times \cdots \times S_n^{\mathcal{M}}$ (für Sorten $S_1, \ldots, S_n$ von L) ist X L-definierbar genau dann, wenn X (als Teilmenge von $(M')^n$) L'-definierbar ist.

(b) Was geht schief, wenn L unendlich viele Sorten hat?

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/MT1-V-W23/