Modelltheorie I – Blatt 13

Abgabe am 2.2.2024 in der Vorlesung oder im Ilias bis 10:30

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

Aufgabe 1 (3 Punkte):

In dieser Aufgabe wollen wir prüfen, dass T^{eq} nie die Austauscheigenschaft hat. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass L die leere Sprache (mit einer Sorte) ist, $\mathcal{M}$ eine unendliche Menge und $T = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$. Zeigen Sie, dass eine Sorte S von L^{eq} existiert und Elemente $a, b, c \in S^{\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}}$ mit $c \in \mathrm{acl}(\{a, b\}) \setminus \mathrm{acl}(\{a\})$ aber $b \notin \mathrm{acl}(\{a, c\})$.

Anmerkung: Trotzdem macht es Sinn, sich zu fragen, ob acl zumindest in manchen Sorten von T^{eq} die Austauscheigenschaft hat. Dies ist oft der Fall.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte):

Sei $\mathcal{M}$ eine L-Struktur und sei $A \subseteq M$ eine beliebige Parameter-Menge.

(a) Geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, dass $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ mehr Sorten haben kann wenn man es als $L(A)$-Struktur auffasst statt als L-Struktur.

(b) Zeigen Sie: Hat $\mathcal{M}$ als L-Struktur Imaginären-Elimination, dann hat es auch als $L(A)$-Struktur Imaginären-Elimination.

Aufgabe 3 (2 Punkte):

Zeigen Sie: Ist $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_2$, so ist auch $\mathcal{M}_1^{\mathrm{eq}} \prec \mathcal{M}_2^{\mathrm{eq}}$.

Aufgabe 4 (3 Punkte):

Zeigen Sie: In Satz 3.2.14 ist die Partition von X in Teilmengen $X_1, \dots, X_\ell$ unnötig (es kann $\ell = 1$ gewählt werden), wenn man folgende Annahmen macht:

- In jeder Sorte von L existiert mindestens ein $\emptyset$-definierbares Element; und:
- Es gibt eine Sorte von L, in der zwei $\emptyset$-definierbare Elemente existieren.

Aufgabe 5 (4 Punkte):

Zeigen Sie: Die angeordnete abelsche Gruppe $(\mathbb{Z}, 0, +, -, <)$ hat Imaginären-Elimination.

(Da $\mathbb{Z} = \mathrm{dcl}(\emptyset)$ ist, gilt auch in $\mathbb{Z}^{\mathrm{eq}}$: $\mathbb{Z}^{\mathrm{eq}} = \mathrm{dcl}(\emptyset)$; also ist jedes Element interdefinierbar mit dem leeren Tupel. Warum folgt daraus *nicht*, dass $\mathbb{Z}$ Imaginären-Elimination hat?)