Modelltheorie I – Blatt 2

Abgabe am 27.10.2023 in der Vorlesung oder im Ilias bis 10:30

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

Aufgabe 1 (2+2+2+1+1 Punkte):

(a) Seien $L \subseteq L'$ Sprachen, sei T eine L-Theorie und sei T' eine L'-Theorie mit $T \subseteq T'$. Zeigen Sie, dass man auf natürliche Weise eine stetige Abbildung $S_n(T') \to S_n(T)$ erhält.
(Erinnerung: Eine Abbildung zwischen beliebigen topologischen Räumen ist stetig, wenn das Urbild offener Mengen offen ist; oder äquivalent: wenn das Urbild abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist.)

(b) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass die Abbildung aus (a) weder injektiv noch surjektiv sein muss.
Vorschlag: Wählen Sie z. B. $L = \emptyset$, $T = \emptyset$, $L' = \{0, 1\}$ und $T' = \{0 = 1\}$.

(c) Sei nun $\mathcal{M}$ eine L-Struktur und seien $A \subseteq A' \subseteq M$ Teilmengen. Wenn man Teil (a) auf geeignete Theorien (in geeigneten Sprachen) anwendet, erhält man eine stetige Abbildung $S_n(A') \to S_n(A)$. Welche Theorien (in welchen Sprachen) muss man dazu wählen?

(d) Beschreiben Sie die Abbildung $S_n(A') \to S_n(A)$ aus (c) expliziter und begründen Sie, dass sie stets surjektiv ist.

(e) Geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, dass die Abbildung $S_n(A') \to S_n(A)$ aus (c) nicht injektiv sein muss.

Aufgabe 2 (2+1+2+3 Punkte):

Sei $\mathcal{M}$ eine L-Struktur, sei $A \subseteq M$ eine Parametermenge und $f\colon M^n \to M^m$ eine A-definierbare Abbildung.

(a) Zeigen Sie, dass f eine (wohldefinierte) Abbildung $f_*\colon S_n(A) \to S_m(A)$ induziert. Mit „induziert" ist gemeint, dass für jedes $\mathcal{M}' \succ \mathcal{M}$ und jedes $\underline{b} \in (M')^n$ gelten soll: $f_*(\mathrm{tp}(\underline{b}/A)) = \mathrm{tp}(f(\underline{b})/A)$.

(b) Beschreiben Sie, wie man, für $p \in S_n(A)$, bestimmen kann, aus welchen Formeln der Typ $f_*(p)$ besteht (ausgehend von den Formeln in p).

(c) Zeigen Sie, dass f_* stetig ist und dass das Bild von offenen Mengen unter f_* wieder offen ist.

(d) Anschaulich kann man sich vorstellen, dass der Typ $\mathrm{tp}(\underline{bc}/A)$ besteht aus $\mathrm{tp}(\underline{b}/A)$ und $\mathrm{tp}(\underline{c}/A\underline{b})$ (mit den Kurzschreibweisen $\underline{bc} := (b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_n)$ und $A\underline{b} := A \cup \{b_1, \dots, b_m\}$). Dies wollen wir präzise machen:
Wir definieren dazu $f\colon M^{m+n} \to M^m, (x_1, \dots, x_{m+n}) \mapsto (x_1, \dots, x_m)$. Sei außerdem $\underline{b} \in M^m$. Zeigen Sie, dass das Urbild $(f_*)^{-1}(\mathrm{tp}(\underline{b}/A))$ von $\mathrm{tp}(\underline{b}/A)$ (unter der Abbildung $f_*\colon S_n(A) \to S_m(A)$) homöomorph zu $S_n(A\underline{b})$ ist.
Hinweis: Der Homöomorphismus ist wie folgt gegeben: Für alle $\mathcal{M}' \succ \mathcal{M}$ und alle $\underline{c} \in (M')^n$ wird $\mathrm{tp}((\underline{c}, \underline{b})/A)$ auf $\mathrm{tp}(\underline{c}/A\underline{b})$ abgebildet.