Modelltheorie I – Blatt 4

Abgabe am 17.11.2023 in der Vorlesung oder im Ilias bis 10:30

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

Aufgabe 1 (3 Punkte):

Sei L eine Sprache, die $<$ enthält, und sei $\mathcal{M}$ eine L-Struktur, bei der $<$ eine Totalordnung definiert. Zeigen Sie: Für beliebige $A \subseteq M$ gilt: $\operatorname{acl}(A) = \operatorname{dcl}(A)$.

Aufgabe 2 (2+1 Punkte):

Sei $T = \mathrm{DOAG}$ die Theorie der nicht-trivialen divisiblen angeordneten abelschen Gruppen, in der Sprache $L_{\mathrm{oag}} = \{0, +, -, <\}$. (Wir hatten vor einem Jahr gesehen, dass T Quantoren-Elimination hat und vollständig ist.)

(a) Zeigen Sie: Jedes Modell $\mathcal{M} \models T$ lässt sich auf natürliche Weise als $\mathbb{Q}$-Vektorraum auffassen, und $A \subseteq M$ gilt: $\operatorname{acl}(A) = \operatorname{dcl}(A) = \langle A \rangle_{\mathbb{Q}}$.

(b) Folgern Sie, dass acl in T die Austauscheigenschaft hat.

Aufgabe 3 (2+2 Punkte):

Sei $L = \{f\}$, wobei f ein einstelliges Funktionssymbol ist. Wir machen $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zu einer L-Struktur $\mathcal{M}$, indem wir definieren: $f^{\mathcal{M}}((m, n)) := (m, 0)$.

(a) Bestimmen Sie $\operatorname{dcl}(\{a\})$ für $a = (m, n) \in M$.

(b) Zeigen Sie, dass acl in $\mathcal{M}$ nicht die Austauscheigenschaft besitzt.

Hinweis: Wenn Sie zeigen wollen, dass gewisse Mengen nicht definierbar sind, ist es nützlich, Automorphismen von $\mathcal{M}$ zu betrachten.

Aufgabe 4 (2+2+2 Punkte):

In der Vorlesung haben wir definiert, dass acl in einer vollständige Theorie T die Austauscheigenschaft hat, wenn in jedem Modell $\mathcal{M} \models T$ gilt:

(*) Für alle $A \subseteq M$ und alle $b, c \in M$ gilt: Ist $c \in \operatorname{acl}(A \cup \{b\}) \setminus \operatorname{acl}(A)$, so ist $b \in \operatorname{acl}(A \cup \{c\})$.

In dieser Aufgabe wollen wir untersuchen, ob man das wirklich für alle Modelle von T prüfen muss.

(a) Sei $\mathcal{M} \models T$ ein Modell, in dem (*) für *endliche* Mengen A gilt. Zeigen Sie, dass dann (*) in $\mathcal{M}$ auch für beliebige Mengen A gilt.

(b) Wir nehmen nun an, dass $\mathcal{M}$ ein $\aleph_0$-saturiertes Modell von T ist, in dem (*) gilt. Zeigen Sie, dass (*) dann in allen Modellen von T gilt.

(c) Geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, dass in (b) die Bedingung „$\aleph_0$-saturiert“ wirklich nötig ist. Geben Sie also ein Beispiel von zwei elementar äquivalenten Strukturen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ an, so dass (*) in $\mathcal{M}$ aber nicht in $\mathcal{M}'$ gilt.
Hinweis: Was können Sie über (*) in $\mathcal{M}$ sagen, wenn wir $\mathcal{M}$ als $L(M)$-Struktur betrachten?