Modelltheorie I – Blatt 5

Abgabe am 24.11.2023 in der Vorlesung oder im Ilias bis 10:30

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

Aufgabe 1 (1+3+2+1+1 Punkte):

Sei $\mathcal{M}$ eine Struktur, so dass acl die Austauscheigenschaft in $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ hat.

(a) Zeigen Sie, dass für $\underline{a} \in M^n$ und $0 \leq k \leq n$ gilt: $\dim(\mathrm{acl}(\underline{a})) = k$ genau dann, wenn $i_1 < \cdots < i_k$ existieren, so dass $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$ algebraisch unabhängig sind und alle restlichen Einträge von $\underline{a}$ in $\mathrm{acl}(\{a_{i_1}, \dots, a_{i_k}\})$ liegen.

(b) Zeigen Sie, dass für $\underline{a} \in M^n$ und $0 \leq k \leq n$ gilt: $\dim(\mathrm{acl}(\underline{a})) \leq k$ genau dann, wenn eine $\emptyset$-definierbare Menge $X \subseteq M^n$ und eine Projektion $\pi\colon M^n \to M^k$ auf eine Teilmenge der Koordinaten existiert mit $\underline{a} \in X$ und so, dass $\pi|_X$ endliche Fasern hat.
Hinweis: Verwenden Sie (a).

(c) Wir betrachten als Beispiel $\mathcal{M} = \mathbb{C}$ (als L_{ring}-Struktur) und $n = 2$: Sei also $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Was kann man über $\dim(\mathrm{acl}(\{a, b\}))$ sagen, wenn ein nicht-triviales Polynom $f \in \mathbb{Q}[x, y]$ existiert mit $f(a, b) = 0$, und was kann man über $\dim(\mathrm{acl}(\{a, b\}))$ sagen, wenn kein solches Polynom existiert?

(d) Zurück zur allgemeinen Situation: Zeigen sie: Ist $\mathcal{M}' \equiv \mathcal{M}$ und haben $\underline{a} \in M^n$ und $\underline{a}' \in (M')^n$ den gleichen Typ (über $\emptyset$), so gilt $\dim(\mathrm{acl}(\underline{a})) = \dim(\mathrm{acl}(\underline{a}'))$.
Hinweis: Verwenden Sie (b).

(e) Zeige Sie, dass für $0 \leq k \leq n$ gilt: Die Menge

$$\{p \in S_n(\emptyset) \mid \dim(\mathrm{acl}(\underline{a})) \leq k \text{ für eine beliebige Realisierung } \underline{a} \text{ von } p\}$$

ist eine offene Teilmenge von $S_n(\emptyset)$.
Hinweis: Verwenden Sie (b).

Aufgabe 2 (3+2 Punkte):

(a) Zeigen Sie: Eine L-Struktur $\mathcal{M}$ ist streng minimal genau dann, wenn für jede L-Formel $\phi(x, \underline{y})$ gilt: Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, so dass für jedes Tupel $\underline{b} \in M^n$ gilt: Entweder $\#\phi(\mathcal{M}, \underline{b}) \leq k$ oder $\#\neg\phi(\mathcal{M}, \underline{b}) \leq k$.
Hinweis für $\Rightarrow$: Wenn kein solches k existiert, sollten Sie in einer elementaren Erweiterung $\mathcal{M}' \succ \mathcal{M}$ ein Gegenbeispiel zu streng minimal finden.
Hinweis für $\Leftarrow$: Können Sie zeigen, dass $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ nützliche Aussagen enthält?

(b) Zeigen Sie, dass es reicht, die streng-minimalitäts-Bedingung in einem einzigen $\aleph_0$-saturierten Modell zu prüfen; also genauer: Ist $\mathcal{M}$ $\aleph_0$-saturiert, so ist $\mathcal{M}$ ist genau dann streng minimal, wenn jede definierbare Teilmenge von M endlich oder ko-endlich ist.
Hinweis: Betrachten Sie für jede L-Formel $\phi(x, \underline{y})$ den partiellen Typ $\Sigma(\underline{y}) = \{\exists^{\geq k} x\colon \phi(x, \underline{y}) \wedge \exists^{\geq k} x\colon \neg\phi(x, \underline{y}) \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Aufgabe 3 (1+2 Punkte):

Sei $\mathcal{M}$ eine Struktur, so dass acl die Austauscheigenschaft in $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ hat, und seien $A_1, A_2 \subseteq M$ algebraisch abgeschlossen.

(a) Zeigen sie, dass dann auch $A_1 \cap A_2$ algebraisch abgeschlossen ist.

(b) Zeigen Sie: $\dim(\mathrm{acl}(A_1 \cup A_2)) + \dim(A_1 \cap A_2) \leq \dim A_1 + \dim A_2$.
Anmerkung: Im Gegensatz zum Vektorraum-Fall gilt in dieser Allgemeinheit i. A. nicht Gleichheit.