Modelltheorie I – Blatt 6

Abgabe am 1.12.2023 in der Vorlesung oder im Ilias bis 10:30

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

Aufgabe 1 (3 Punkte):

Lemma 2.2.10 besagt: Sind $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ beliebige Strukturen, sind $A \subseteq M$ und $A' \subseteq M'$ Teilmengen und ist $f\colon A \to A'$ eine elementare Bijektion, so lässt sich f zu einer elementaren Bijektion $\operatorname{acl}(A) \to \operatorname{acl}(A')$ fortsetzen.

Der Beweis wurde in der Vorlesung nur skizziert. Füllen Sie die Details aus, mit Hilfe des Zornschen Lemmas.

Aufgabe 2 (2+3+2+1+1+2+2 Punkte):

Sei K ein Körper. Ein *affiner Raum* über K ist ein „K-Vektorraum, bei dem man vergessen hat, was der 0-Vektor ist“. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, affine Räume als Strukturen aufzufassen. In dieser Aufgabe machen wir es wie folgt:

Ein affiner Raum über K ist ein K-Vektorraum V, den wir als Struktur in der folgenden Sprache $L_{K\text{-AFF}}$ auffassen: $L_{K\text{-AFF}}$ besteht aus einem zwei-stelligen Funktionssymbol f_λ für jedes $\lambda \in K$, das wie folgt interpretiert wird: $f_\lambda(v, v') := \lambda v + (1 - \lambda)v'$ für alle $v, v' \in V$.

Als erstes wollen wir prüfen, dass V als $L_{K\text{-AFF}}$-Struktur sich wirklich so verhält, wie es soll. Zeigen Sie:

(a) „In einem affinen Raum kann man den Nullpunkt durch Translation überall hinschieben.“ Also: Für $v_0 \in V$ beliebig ist die Abbildung $V \to V, w \mapsto v_0 + w$ ein $L_{K\text{-AFF}}$-Automorphismus von V.

(b) „Wenn man sich doch wieder an die 0 erinnert, hat man wieder einen normalen Vektorraum.“ Also formal: Eine Teilmenge von V^n ist $L_{K\text{-VR}}$-definierbar genau dann, wenn sie $L_{K\text{-AFF}}(\{0\})$-definierbar ist.
Hinweis: Um die Summe $v + v'$ in $L_{K\text{-AFF}}(\{0\})$ auszurücken können Sie zunächst $\frac{v+v'}{2}$ ausdrücken und dann Verdopplung ausdrücken.

Jetzt wollen wir die Modelltheorie von affinen Räumen verstehen. Im Folgenden sei V ein K-Vektorraum, aufgefasst als $L_{K\text{-AFF}}$-Struktur.

(c) Die *affine Hülle* einer Teilmenge $A \subseteq V$ ist definiert als die Menge derjenigen Linearkombinationen von Elementen von A, die Koeffizientensumme 1 haben; also:

$$\operatorname{aff}_K(A) := \{\sum_{i=1}^{\ell} r_i a_i \mid \ell \in \mathbb{N}, r_i \in K, a_i \in A, \sum_{i=1}^{\ell} r_i = 1\}$$

Zeigen Sie: $\operatorname{acl}(A) = \operatorname{aff}_K(A)$.

(d) Zeigen Sie, dass (für festes K) die Theorie AFF_K der unendlichen affinen Räume über K vollständig ist.

(e) Zeigen Sie, dass AFF_K streng minimal ist.

(f) Bestimmen Sie die minimale Dimension eines Modells von AFF_K (in Abhängigkeit davon, ob K endlich oder unendlich ist).

(g) Seien $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ zwei algebraisch abgeschlossene Mengen, die zwei-dimensional im modelltheoretischen Sinn sind (wobei $\mathbb{R}^n$ als $L_{\mathbb{R}\text{-AFF}}$-Struktur aufgefasst wird). Welche Werte können $\dim(A_1 \cap A_2)$ und $\dim(\operatorname{acl}(A_1 \cup A_2))$ annehmen, und wie hängen diese Werte von A_1 und A_2 ab?
Benutzen Sie dies, um ein konkretes Beispiel anzugeben, bei dem bei der Dimensionsformel aus Blatt 5, Aufgabe 3 Gleichheit nicht gilt.

Hinweis: Bei mehreren der obigen Teilaufgaben kann man sich viel Arbeit sparen, indem man die $L_{K\text{-AFF}}$-Frage mit Hilfe von (a) und (b) zu einer $L_{K\text{-VR}}$-Frage übersetzt.

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/MT1-V-W23/