Modelltheorie I – Blatt 8

Abgabe am 15.12.2023 in der Vorlesung oder im Ilias bis 10:30

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

Auf dem ganzen Blatt sei k ein Körper und K ein $\max\{|k|^+, \aleph_0\}$-saturierter algebraisch abgeschlossener Körper, der k enthält.

Aufgabe 1 (1+1 Punkte):

(a) Zeigen Sie: Für beliebige $F \subseteq k[\underline{x}]$ ist $I(V(F))$ ist ein Ideal, das F enthält.

(b) Geben Sie ein Beispiel an, bei dem $I(V(F))$ echt größer ist als das von F erzeugte Ideal.
Anmerkung: Es ist z. B. möglich, ein solches Beispiel zu finden, bei dem $V(F) = \{0\} \subseteq K$ ist.

Aufgabe 2 (1+1+2 Punkte):

(a) Zeigen Sie: Ist k auch algebraisch abgeschlossen, so sind die Zariski-abeschlossenen Teilmengen von K genau alle endlichen Teilmengen von k und die gesamte Menge K.

(b) Was ändert sich, wenn k nicht algebraisch abgeschlossen ist?

(c) Ein topologischer Raum heißt hausdorffsch, wenn je zwei verschiedene Punkte disjunkte offene Umgebungen haben. Zeigen Sie, dass die Zariski-Topologie auf K^n „anti-hausdorffsch" ist: Es gibt keine zwei Punkte, die disjunkte offene Umgebungen haben. (Oder, einfacher ausgedrückt: Je zwei offene, nicht-leere Mengen haben nicht-leeren Schnitt.)
Anmkerung: Anschaulich kann man sich das recht schnell plausibel machen, aber wie macht man's formal?

Aufgabe 3 (2 Punkte):

Zeigen Sie: Ist $K^n \supseteq Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \dots$ eine Kette von Zariski-abgeschlossenenen Mengen, so gibt es ein n, so dass $Y_{n'} = Y_n$ für alle $n' > n$.

(Einen topologischen Raum mit dieser Eigenschaft nennt man noethersch.)