Modelltheorie I – Blatt 1

Abgabe am 20.19.2023 in der Vorlesung oder im Ilias

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

Aufgabe 1 (1+2 Punkte):

Sei dafür $\mathcal{M}$ eine L-Struktur und sei $A \subseteq M$. In dieser Aufgabe wollen wir Bemerkung 1.1.6 rechtfertigen, die besagt, dass wir uns bei Realisierungen von Typen über A auf elementare Erweiterungen von $\mathcal{M}$ beschränken können.

(a) Sei $\Sigma(\underline{x})$ eine Menge von $L(A)$-Formeln, die eine Realisierung in einem Modell von $\mathrm{Th}_{L(A)}(\mathcal{M})$ besitzt (also ein partieller Typ im Sinne von Definition 1.1.1). Zeigen Sie, dass $\Sigma(\underline{x})$ dann insbesondere auch eine Realisierung in einer elementaren Erweiterung von $\mathcal{M}$ besitzt.

(b) Sei nun $\Sigma'(\underline{x})$ ein weiterer partieller Typ über A. Wir nehmen an, dass in jeder elementaren Erweiterung $\mathcal{M}' \succ \mathcal{M}$ gilt: Jede Realisierung von $\Sigma(\underline{x})$ ist auch eine Realisierung von $\Sigma'(\underline{x})$. Zeigen Sie, dass dann $\Sigma(\underline{x}) \models \Sigma'(\underline{x})$ gilt.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte):

Sei $T = \mathrm{DLO}$ die Theorie der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte (in der Sprache $L = \{<\}$). Erinnerung: Wir hatten gesehen, dass T Quantorenelimination besitzt.

(a) Bestimmen Sie alle (vollständigen) 1-Typen und 2-Typen von T. (Sie sollten nur einen 1-Typen und drei 2-Typen finden.)

(b) Zeigen Sie, dass T nur endlich viele n-Typen hat, für jedes feste n.

Aufgabe 3 (2+2 Punkte):

Wir arbeiten in der Struktur $(\mathbb{Q}, <)$.

(c) Zeigen Sie, dass über $\mathbb{Q}$ überabzählbar viele 1-Typen existieren. (Hinweis: Betrachten Sie die Typen von Elementen von $\mathbb{R} \succ \mathbb{Q}$. Gibt es verschiedene reelle Zahlen, die den selben Typ über $\mathbb{Q}$ haben?)

(d) Beschreiben Sie alle 1-Typen über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 4 (2+3 Punkte):

Sei L eine abzählbare Sprache, sei $\mathcal{M}$ eine beliebige L-Struktur, und sei $\mathcal{M}^* := \mathcal{M}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ eine Ultrapotenz von $\mathcal{M}$, für einen freien Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf $\mathbb{N}$. Wir wollen zeigen, dass $\mathcal{M}^*$ $\aleph_1$-saturiert ist.

Wir wählen dazu für jedes Element $a \in A$ einen festen Repräsentanten $(a_i)_i \in M^{\mathbb{N}}$ aus. Ist $\underline{a} \in A^n$, so schreiben wir $(\underline{a}_i)_i \in (M^n)^{\mathbb{N}}$ für die Repräsentanten-Folge des Tupels.

(a) Zeigen Sie: Ist $\phi(x, \underline{a}) \in p$, für eine L-Formel $\phi(x, \underline{y})$ und $\underline{a} \in A^n$, so existiert für fast alle i eine Realisierung von $\phi(x, \underline{a}_i)$ in $\mathcal{M}$. Hierbei ist „fast alle" im Sinne von $\mathcal{U}$ gemeint; also formal: Die Menge der $i \in \mathbb{N}$, so dass $\phi(x, \underline{a}_i)$ eine Realisierung in $\mathcal{M}$ hat, ist ein Element von $\mathcal{U}$.

(b) Seien nun $\phi_i(x)$ ($i \in \mathbb{N}$) alle Formeln in $p(x)$. Wir setzen $\psi_i(x) := \phi_0(x) \wedge \cdots \wedge \phi_i(x)$ und wählen dann $b_i \in M$ wie folgt: Schreibe $\psi_i(x) = \psi_i(x, \underline{a})$ wie in Teil (a). Hat $\psi_i(x, \underline{a}_i)$ eine Realisierung in M, so sei b_i eine beliebige solche Realisierung. Hat $\psi_i(x, \underline{a}_i)$ keine Realisierung in M, so sei b_i ganz belieibig. Zeigen Sie, dass $(b_i)_i$ der Repräsentant (in $\mathcal{M}^*$) einer Realisierung von p ist.

Ex 1.] $\Sigma(\underline{x})$ be a partial type of $Th_A(M)$, $\Sigma(\underline{x})$ has realization in an elementry extension of M.

Set: $\Gamma = \Sigma(\underline{x}) \cup \underbrace{diag(M)_{el}}_{\text{It's a sentence in } L_M}$ which are satisfiable in M.

$L_M = L \cup \{\underset{\text{constant}}{\underline{m}} \mid m \in M\}$ $diag(M)_{el} = \{\varphi(m_1, \dots, m_n) \mid M \models \varphi(m_1, \dots, m_n),\ \varphi \text{ is an } L\text{-formula}\}$

If $N \models Diag_{el}(M) \Rightarrow M \prec N$.

we are going to show that Γ is satisfiable.

By compactness, it's enough two show that, any finite subset Δ is satisfiable.

W.l. Δ is in the form: $\varphi(v_1, \dots, v_n, \underbrace{a_1, \dots, a_m}_{\in A}) \wedge \psi(a_1, \dots, a_m, \underbrace{b_1, \dots, b_l}_{\in M \setminus A})$

$\varphi(\underline{v}, \underline{a}) \in \Sigma(\underline{x})$

$M \models \psi(\underline{a}, \underline{b}) \Rightarrow \exists \underline{w}\ \psi(\underline{a}, \underline{w}) \in Th_A(M)$

Since $\Sigma(\underline{x}) \cup Th_A(M)$ is satisfiable, there exists model $N_0 \models Th_A(M)$ s.t N_0 Contains a realization for $\Sigma(\underline{x})$ so

Δ is satisfiable.

By compactness, there is $N \models \Gamma$. ($N \models Diag_{el}(M)$)

$M \prec N$, N has a realization for $\Sigma(\underline{x})$

(b) Sei nun $\Sigma'(\underline{x})$ ein weiterer partieller Typ über A. Wir nehmen an, dass in jeder elementaren Erweiterung $M' \succ M$ gilt: Jede Realisierung von $\Sigma(\underline{x})$ ist auch eine Realisierung von $\Sigma'(\underline{x})$. Zeigen Sie, dass dann $\Sigma(\underline{x}) \models \Sigma'(\underline{x})$ gilt.

$\Sigma(\underline{x}) \models \Sigma'(\underline{x})$ means that any realization of $\Sigma(\underline{x})$ in any model $Th_A(M)$ is a realization of $\Sigma'(\underline{x})$

Let

$N \models Th_A(M)$, $N \models \Sigma(\underline{n})$ for $\underline{n} \in N$.

consider $\Gamma' = \mathrm{ediag}(M) \cup \mathrm{ediag}(N) \cup \Sigma(\underline{x})$

$\Delta \subseteq_{\text{finite}} \Gamma'$, without loss, we can assume

$$\Delta = \varphi(\underbrace{\underline{a}}_{\in A}, \underbrace{\underline{m}}_{\in M \setminus A}) \wedge \psi(\underline{a}, \underset{\in N\setminus A}{\underline{n}}) \wedge \underbrace{\chi(\underline{a}, \underline{v})}_{\in \Sigma(\underline{x})}$$

Since $\exists \underline{w}\ \varphi(\underline{a}, \underline{w}),\ \exists \underline{z}\ \psi(\underline{a}, \underline{z}) \in Th_A(M)$

then $N \models \exists \underline{w} \in \varphi(\underline{a}, \underline{w}) \wedge \exists \underline{z}\ \psi(\underline{a}, \underline{z}) \wedge \chi(\underline{a}, \underline{n})$

Δ is f.s, so by compactness, there is $N' \models \Gamma'$

$\Rightarrow$ $N \prec N'$

$M \prec N' \longrightarrow \forall \underline{n}' \in N' \quad N' \models \Sigma(\underline{n}')$

$\Downarrow$

As $N \preceq N' \Rightarrow \quad N' \models \Sigma'(\underline{n}')$

$N \models \Sigma(\underline{n}) \Rightarrow N' \models \Sigma(\underline{n})$

$\Rightarrow N' \models \Sigma'(\underline{n}) \Rightarrow N' \models \Sigma(\underline{n})$

Aufgabe 2 (2+2 Punkte):

Sei $T = \mathrm{DLO}$ die Theorie der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte (in der Sprache $L = \{<\}$). Erinnerung: Wir hatten gesehen, dass T Quantorenelimination besitzt.

(a) Bestimmen Sie alle (vollständigen) 1-Typen und 2-Typen von T. (Sie sollten nur einen 1-Typen und drei 2-Typen finden.)

(b) Zeigen Sie, dass T nur endlich viele n-Typen hat, für jedes feste n.

a) DLO has QE

1-type: Let $P(x)$ be a 1-type. $\begin{cases} \text{1- all formula } \varphi \in p(x) \text{ is consequence of } x=x \\ \end{cases}$

complete

2-type: Let $P(x,y)$ be a 2-type: (complete)

$$\begin{cases} \varphi_1: x = y \\ \varphi_2: x \neq y \begin{cases} x > y : \varphi_3 \\ x < y : \varphi_4 \end{cases} \end{cases}$$

$p(x,y)$ can only contains one of the φ_1 and φ_2

if it contains φ_2 then it can, only has φ_3 or φ_4

b) for any $P(x_1, \dots, x_n)$, all the possibilities restrict to diffrent situations $x_1, \dots, x_n$ respect to each other (same as above).

Aufgabe 3 (2+2 Punkte):

Wir arbeiten in der Struktur $(\mathbb{Q}, <)$.

(c) Zeigen Sie, dass über $\mathbb{Q}$ überabzählbar viele 1-Typen existieren. (Hinweis: Betrachten Sie die Typen von Elementen von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Gibt es verschiedene reelle Zahlen, die den selben Typ über $\mathbb{Q}$ haben?)

(d) Beschreiben Sie alle 1-Typen über $\mathbb{Q}$.

c) Let $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, There are sequences $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{q'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ s.t $q_n < r < q'_n$ for all $n \in \mathbb{N}$ and $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} q'_n(x) = r$

Put $P_r(x) := \{ x > q_n \} \cup \{ x < q'_n(x) \}$ is a partial type over $\mathbb{Q}$

If $r \neq r'$, $r, r' \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

It's not hard to see that, the sequences can be constructed in a way that $x < q \in P_r(x)$

$x > q \in P_{r'}(x)$

d) We will show that each type over $\mathbb{Q}$ corresponds to a cut.

$p(\underline{x})$ is a 1-type / $\mathbb{Q}$, If $a \in \mathbb{Q}$, as p is complete, it contains one of formula of the forms $x = a$, $x > a$, $x < a$.

<u>Case 1</u>: p is realized in A.

p contains $x = a$ for some $a \in \mathbb{Q}$,

So $p(x) = \{ \varphi(x) \mid \mathbb{Q} \models \varphi(a) \}$

Case 2: otherwise:

Let $L_p = \{ a \in \mathbb{Q} : a < v \in p \}$

$U_p = \{ a \in \mathbb{Q} : v < a \in p \}$

If $v > a$, $v < b \in p$, As $p \cup Th_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q})$ is satisfiable, then $a < b$

Hence $b > a$ for each $a \in L_p$, $b \in U_p$. L_p, U_p determines a cut in $\mathbb{Q}$

On the other hand Let $\mathbb{Q} = U \cup L$ s.t (L, U) is a cut for $\mathbb{Q}$

Then $Th_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}) \cup \{a < v : a \in L\} \cup \{v < b : b \in U\}$ is satisfiable

Thus there is type $p(x)$ s.t $L_p = L$ and $U_p = U$

claim: a cut completely determine $p(x)$

$$\{p\} = \bigcap_{a \in L_p} \{\text{all 1-types contains } a < v\} \cap \bigcap_{b \in U_p} \{\text{all 1-types contains } v < b\}$$

Suppose $q \neq p$, $L_p = L_q$
$U_p = U_q$

By QE, the only formulas appear in p, q are b.c of $u = v$, $u > v$

As p, q determin same cut then $p = q$.

This argument shows that 1-types $/\mathbb{Q}$ and cuts over $\mathbb{Q}$ correspond to each other.

This shows we have $2^{\aleph_0}$ 1-type over $\mathbb{Q}$

Aufgabe 4 (2+3 Punkte):

Sei L eine abzählbare Sprache, sei $\mathcal{M}$ eine beliebige L-Struktur, und sei $\mathcal{M}^* := \mathcal{M}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ eine Ultrapotenz von $\mathcal{M}$, für einen freien Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf $\mathbb{N}$. Wir wollen zeigen, dass $\mathcal{M}^*$ $\aleph_1$-saturiert ist.

Wir wählen dazu für jedes Element $a \in A$ einen festen Repräsentanten $(a_i)_i \in M^{\mathbb{N}}$ aus. Ist $\underline{a} \in A^n$, so schreiben wir $(\underline{a}_i)_i \in (M^n)^{\mathbb{N}}$ für die Repräsentanten-Folge des Tupels.

(a) Zeigen Sie: Ist $\phi(x, \underline{a}) \in p$, für eine L-Formel $\phi(x, \underline{y})$ und $\underline{a} \in A^n$, so existiert für fast alle i eine Realisierung von $\phi(x, \underline{a}_i)$ in $\mathcal{M}$. Hierbei ist „fast alle" im Sinne von $\mathcal{U}$ gemeint; also formal: Die Menge der $i \in \mathbb{N}$, so dass $\phi(x, \underline{a}_i)$ eine Realisierung in $\mathcal{M}$ hat, ist ein Element von $\mathcal{U}$.

(b) Seien nun $\phi_i(x)$ $(i \in \mathbb{N})$ alle Formeln in $p(x)$. Wir setzen $\psi_i(x) := \phi_0(x) \wedge \cdots \wedge \phi_i(x)$ und wählen dann $b_i \in M$ wie folgt: Schreibe $\psi_i(x) = \psi_i(x, \underline{a})$ wie in Teil (a). Hat $\psi_i(x, \underline{a}_i)$ eine Realisierung in M, so sei b_i eine beliebige solche Realisierung. Hat $\psi_i(x, \underline{a}_i)$ keine Realisierung in M, so sei b_i ganz beliebig. Zeigen Sie, dass $(b_i)_i$ der Repräsentant (in $\mathcal{M}^*$) einer Realisierung von p ist.

$\varphi(x, \underline{a}) \in P$ $\quad\quad$ $\underline{a} \in (M^n)^{\mathbb{N}}$

$S_0 := \{ i \in \mathbb{N} \mid M \models \exists x \ \varphi(x, a_i) \} \subseteq \mathbb{N}$

$S_1 := \{ i \in \mathbb{N} \mid M \models \neg \exists x \ \varphi(x, a_i) \} \subseteq \mathbb{N}$

$S_0 = \mathbb{N} \setminus S_1$

As $\mathcal{U}$ is an ultrafilter then only one of S_0 and $S_1 \in \mathcal{U}$

If $S_1 \in \mathcal{U}$ is a contradiction with consistency of $P(x)$.

Therefore $S_0 \in \mathcal{U}$.

b) $P(\underline{x}) = \{ \varphi_i(\underline{x}) \mid i \in \mathbb{N} \}$

$\psi_i(\underline{x}) = \varphi_0(\underline{x}) \wedge \dots \wedge \varphi_i(x)$

we can see $\psi_i(x)$ as $\psi_i(\underline{x}, \underline{a})$, with same argument as (a)

$M \models \exists x \ \psi_i(\underline{x}, \underline{a}_i)$

choose $(b_i)_{i \in \omega}$ $\begin{cases} b_i \text{ is realization of } \psi_i(\underline{x}, \underline{a_i}) \text{ (If exist)} \\ \text{otherwise choose } b_i \text{ arbitrary.} \end{cases}$

$\varphi_n(x) \in P(\underline{x})$, we should show $M^* \models \varphi(\underline{x}, \underline{a})$

for almost all $i > n$ $\quad M \models \psi_i(b_i, \underline{a}_i') \qquad \underline{a}_i \subseteq \underline{a}_i'$

$$\Downarrow$$

$$M \models \varphi_n(b_i, \underline{a}_i)$$

$$\Downarrow$$

$$M^* \models \varphi(\underline{x}, \underline{a}).$$