Modelltheorie I – Blatt 11

Abgabe am 19.1.2024 in der Vorlesung oder im Ilias bis 10:30

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

Aufgabe 1 (2+2 Punkte):

Sei L eine beliebige Sprache. Zeigen Sie:

(a) Sind $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}'$ elementar äquivalente L-Strukturen, $\phi(\underline{x}, \underline{y})$ eine L-Formel, und $\underline{a} \in M^n, \underline{a}' \in (M')^n$ Tupel mit $\mathrm{tp}(\underline{a}) = \mathrm{tp}(\underline{a}')$, so ist $\mathrm{MR}(\phi(\mathcal{M}, \underline{a})) = \mathrm{MR}(\phi(\mathcal{M}', \underline{a}'))$.

(b) Es existiert eine Ordinalzahl α (die nur von L abhängt), so dass für jede L-Struktur $\mathcal{M}$ und jede definierbare Menge $X \subseteq M^n$ gilt: Ist $\mathrm{MR}(X) \neq \infty$, so ist bereits $\mathrm{MR}(X) < \alpha$.
Hinweis: Wie viele verschiedene Morley-Ränge kann es überhaupt geben?

Aufgabe 2 (3+3 Punkte):

Sei $\mathcal{M}$ $\aleph_0$-saturiert, seien $X \subseteq M^n$ und $Y \subseteq M^m$ definierbare Mengen und sei $f\colon X \to Y$ eine definierbare Abbildung. Wir nehmen an, dass jede Faser von f den gleichen Morley-Rang $\mathrm{MR}(f^{-1}(\underline{b})) = \beta \in \mathrm{On}$ hat. (Insbesondere ist f surjektiv.)

(a) Zeigen Sie: Ist $\mathrm{MR}(Y) \in \mathbb{N}$ und $\beta \in \mathbb{N}$, so so ist $\mathrm{MR}(X) \geq \mathrm{MR}(Y) + \beta$.

(b) Geben Sie zwei Beispiele mit $\beta = 1$ und $\mathrm{MR}(Y) = \omega$ an: eins mit $\mathrm{MR}(X) = \omega$ und eins mit $\mathrm{MR}(X) = \omega + 1$.

Aufgabe 3 (2+2+2 Punkte):

Sei X eine definierbare Menge, sei $\beta \in \mathrm{On}$ und seien $X_i \subseteq X$ (für $i \in \mathbb{N}$) definierbare Teilmengen mit $\mathrm{MR}(X_i) = \beta$ und mit der Eigenschaft, dass jedes $a \in X$ in höchstens zwei der Mengen X_i liegt. Zeigen Sie:

(a) Es existieren nur endlich viele i, so dass $\mathrm{MR}(X_i \setminus X_1) < \beta$ ist.

(b) $\mathrm{MR}(X) \geq \beta + 1$.
Hinweis: Wenn Sie unendlich viele disjunkte Teilmengen von X finden möchten, die Morley-Rang β haben, können Sie ja mal mit X_1 anfangen und dann (a) anwenden…

(c) Sind X und Y beliebige definierbare Mengen und ist $f\colon X \to Y$ eine surjektive definierbare Abbildung, so dass jede Faser $f^{-1}(\underline{a})$ (für $\underline{a} \in Y$) höchtens zwei Elemente hat, so gilt $\mathrm{MR}(X) = \mathrm{MR}(Y)$.
Anmerkung: Statt „$|f^{-1}(\underline{a})| \leq 2$“ reicht es zu fordern, dass alle Fasern endlich sind. (Anders ausgedrückt: In Aufgabe 2 habe: $\beta = 0 \Rightarrow \mathrm{MR}(X) = \mathrm{MR}(Y)$.) Wenn Sie Spaß an kombinatorischem Gebastel haben, können Sie das auch noch zeigen.

Proof by induction on α.

1-a) Since $tp(\underline{a}) = tp(\underline{a}')$

$$M \equiv M'$$

$$\varphi(M, \underline{a}) \neq \emptyset \iff \varphi(M', \underline{a}') \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow MR(\varphi(M, \underline{a})) \geq 0 \iff MR(\varphi(M', \underline{a}')) \geq 0$$

If α is limit ordinal:

$$MR(\varphi(M, \underline{a})) \geq \alpha \iff MR(\varphi(M, \underline{a})) \geq \beta \text{ for all } \beta < \alpha$$

by induction assumption

$$\iff MR(\varphi(M', \underline{a}')) \geq \beta \text{ for all } \beta < \alpha$$

$$\iff MR(\varphi(M', \underline{a}')) \geq \alpha$$

Suppose that is true for α, $RM(\varphi(M, \underline{a})) \geq \alpha+1$

$\Rightarrow$ there exist $\psi_1, \psi_2, \dots$ such that $MR(\psi_i(M, \underline{b}_i)) \geq \alpha$ for all $i < \omega$

As M is $\left\{\begin{array}{l}\text{and } M \equiv M' \\ 2^{\aleph_0}\text{- saturated,}\end{array}\right.$ by back and forth argument we can find $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \dots$ s.t

$$tp(\underline{a}', \underline{c}_1, \dots, \underline{c}_n) = tp(\underline{a}, \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$$

so by induction $MR(\psi_i(M, \underline{c}_i)) \geq \alpha$

$$\cap_1$$

$$(\varphi(M', \underline{a}'))$$

$$\Rightarrow MR(\varphi(M', \underline{a}')) \geq \alpha+1$$

the argument is symmetric.

2.a $MR(X) \geq MR(Y) + \beta$ $\quad MR(f^{-1}(\underline{b})) = \beta$

$MR(Y) = 0 \implies X = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(b_i) \implies MR(X) = MR(f^{-1}(\underline{b}_i))$

$MR(Y) = n \implies MR(X) \geq MR(Y) + \beta$

$MR(Y) = n+1 \implies \exists Y_1, Y_2, \ldots \quad MR(Y_i) = n.$

$f_i : f^{-1}(Y_i) \to Y_i \qquad MR(\underbrace{f^{-1}(Y_i)}_{\text{disjoint.}}) \geq MR(Y_i) + \beta$

$\Downarrow$

$MR(X) \geq MR(Y) + \beta$

2.b Let $L = \{E_1, E_2, E_3, \ldots\}$

1) M_1 is an infinite set and E_1 has infinite class such all of them is infinite. $\to MR(M_1) = 1$

2) M_2 Consist infinite copy of M_1 such that each of them is an class of E_2, $MR(M_2) = 2.$

We can Continue this procidure, then we can construct $M = \bigcup_{i<\omega} M_i$ s.t $MR(M) = \omega$.

We need $\omega \to 1$ function.

$f_1 : M \to M$ We add constant c_1 in our language which repsent first class of E_1

$f : M \to M$ maped all elements to this class.

for second part we can consider M' which consist ω- many disjoint copy of M then same function also work for this case.

$MR(x) \neq +\infty \implies MR(x)$ bounded by some ordinal.

If we fix $\aleph_1$ - saturated model M then.

$L(M)$ — formula. $\longrightarrow$

$$\leq \omega^{|L(M)|} \sim 2^{|L(M)|}$$

but by part (a) $\leq |P_\omega(S_n(T))| = 2^{2^{|L|}}$

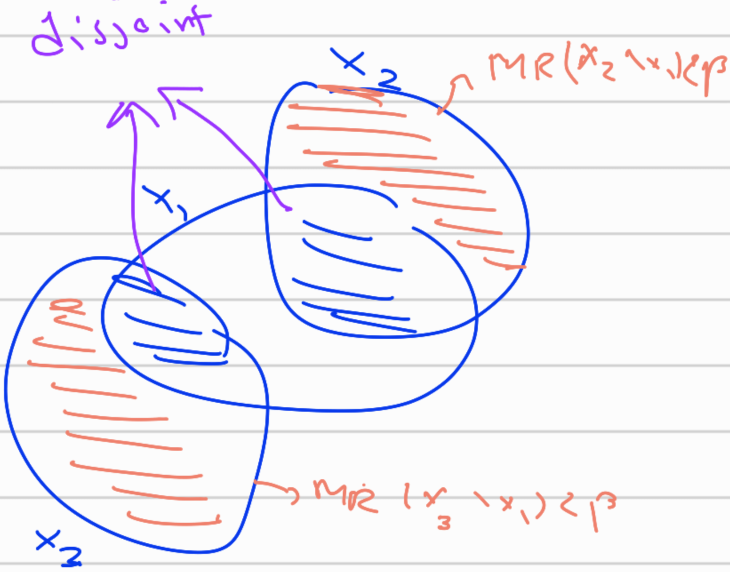
we can find a bound independent of a model.

$MR(X_i) = \beta$

for $i = 1$ $MR(X_i \setminus X_1) = -1 < \beta$

otherwise, there exist infinitly many X_i s.t

$MR(X_i \setminus X_1) < \beta$



$(X_1 \cap X_2) \cap (X_1 \cap X_3) = \phi$

and

$\beta = MR(X_i) = MR(\underbrace{X_2 \setminus X_1}_{<\beta} \cup (X_1 \cap X_i)) \Rightarrow$

$MR(X_1 \cap X_i) = \beta$

$\Rightarrow MR(X_1) > \beta$ Conteradiction.

2) $MR(X) \geq \beta + 1$

(a) $\Rightarrow$ we do same procidure as (a) for

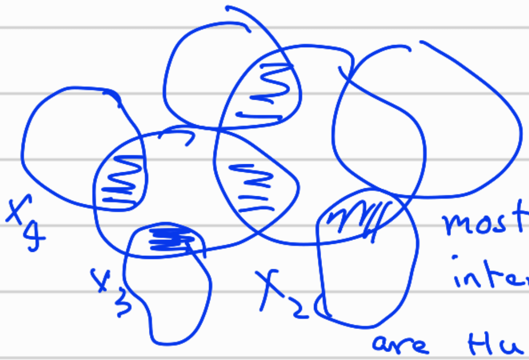
$X_i \setminus X_2 \longrightarrow$ finitly many $MR(X_i \cap X_2) = \beta$

$X_i \setminus X_3$

$\vdots$

these sets are disjoint and all have morley rank β.

$\Rightarrow MR(X) = \beta$.



most of intersections are Huge!!!

c) by 2.a $MR(X) \geq \beta + MR(Y)$ $\beta = 0 \Rightarrow MR(X) \geq MR(Y)$

$MR(X) \leq MR(Y) \iff MR(X) \geq \alpha \Rightarrow MR(Y) \geq \alpha$

$\alpha = 0$, $M(X) \geq \alpha$ $X \neq \emptyset \Rightarrow Y \neq \emptyset \Rightarrow MR(Y) \geq 0$

α is a limit ordinal

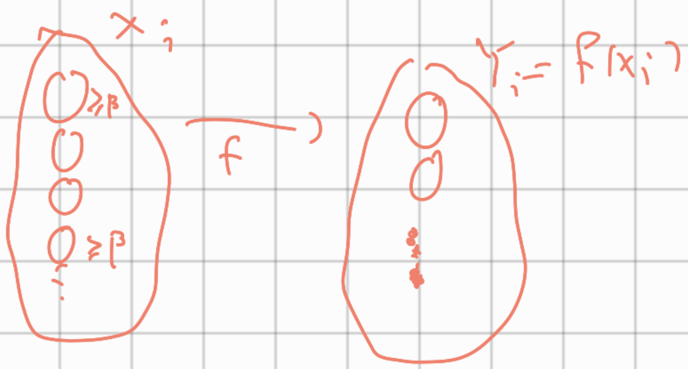
$MR(X) \geq \beta$ $\beta > \alpha$ $MR(X) \geq \beta \Rightarrow MR(Y) \geq \beta \Rightarrow MR(Y) \geq \alpha$

suppose $MR(X) \geq \beta + 1$ find $X_i \subset X$ with $MR(X_i) \geq \beta$

$Y_i := f(X_i)$

claim: $MR(Y_i) \geq \beta$

Proof by induction:



for $\beta = 0$ it's clear.

So:

$MR(X) \geq \beta \Rightarrow MR(f(X)) \geq \beta$

$MR(X) \geq \beta + 1 \Rightarrow \exists X_i$ $MR(X_i) \geq \beta$ disjoint.

$MR(f(X_i)) \geq \beta$ (by induction assumption).

as $|f^{-1}(a)| \leq 2 \underset{(b)}{\Rightarrow}$ each point of $f(X)$ belongs to at most two $f(X_i)$ so

So $MR(f(X)) \geq \beta + 1$

$\Rightarrow MR(Y) \geq \beta + 1$

(b) each point belong to at most two Y_i