Modelltheorie I – Blatt 2

Abgabe am 27.10.2023 in der Vorlesung oder im Ilias bis 10:30

Bitte geben Sie an, welche (Teil-)Aufgaben Sie gelöst haben. (Sie können auch angeben, dass Sie manche Aufgaben partiell gelöst haben.)

Aufgabe 1 (2+2+2+1+1 Punkte):

(a) Seien $L \subseteq L'$ Sprachen, sei T eine L-Theorie und sei T' eine L'-Theorie mit $T \subseteq T'$. Zeigen Sie, dass man auf natürliche Weise eine stetige Abbildung $S_n(T') \to S_n(T)$ erhält.
(Erinnerung: Eine Abbildung zwischen beliebigen topologischen Räumen ist stetig, wenn das Urbild offener Mengen offen ist; oder äquivalent: wenn das Urbild abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist.)

(b) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass die Abbildung aus (a) weder injektiv noch surjektiv sein muss.
Vorschlag: Wählen Sie z. B. $L = \emptyset$, $T = \emptyset$, $L' = \{0, 1\}$ und $T' = \{0 = 1\}$.

(c) Sei nun $\mathcal{M}$ eine L-Struktur und seien $A \subseteq A' \subseteq M$ Teilmengen. Wenn man Teil (a) auf geeignete Theorien (in geeigneten Sprachen) anwendet, erhält man eine stetige Abbildung $S_n(A') \to S_n(A)$. Welche Theorien (in welchen Sprachen) muss man dazu wählen?

(d) Beschreiben Sie die Abbildung $S_n(A') \to S_n(A)$ aus (c) expliziter und begründen Sie, dass sie stets surjektiv ist.

(e) Geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, dass die Abbildung $S_n(A') \to S_n(A)$ aus (c) nicht injektiv sein muss.

Aufgabe 2 (2+1+2+3 Punkte):

Sei $\mathcal{M}$ eine L-Struktur, sei $A \subseteq M$ eine Parametermenge und $f\colon M^n \to M^m$ eine A-definierbare Abbildung.

(a) Zeigen Sie, dass f eine (wohldefinierte) Abbildung $f_*\colon S_n(A) \to S_m(A)$ induziert. Mit „induziert“ ist gemeint, dass für jedes $\mathcal{M}' \succ \mathcal{M}$ und jedes $\underline{b} \in (M')^n$ gelten soll: $f_*(\mathrm{tp}(\underline{b}/A)) = \mathrm{tp}(f(\underline{b})/A)$.

(b) Beschreiben Sie, wie man, für $p \in S_n(A)$, bestimmen kann, aus welchen Formeln der Typ $f_*(p)$ besteht (ausgehend von den Formeln in p).

(c) Zeigen Sie, dass f_* stetig ist und dass das Bild von offenen Mengen unter f_* wieder offen ist.

(d) Anschaulich kann man sich vorstellen, dass der Typ $\mathrm{tp}(\underline{bc}/A)$ besteht aus $\mathrm{tp}(\underline{b}/A)$ und $\mathrm{tp}(\underline{c}/A\underline{b})$ (mit den Kurzschreibweisen $\underline{bc} := (b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_n)$ und $A\underline{b} := A \cup \{b_1, \dots, b_m\}$). Dies wollen wir präzise machen:
Wir definieren dazu $f\colon M^{m+n} \to M^m, (x_1, \dots, x_{m+n}) \mapsto (x_1, \dots, x_m)$. Sei außerdem $\underline{b} \in M^m$. Zeigen Sie, dass das Urbild $(f_*)^{-1}(\mathrm{tp}(\underline{b}/A))$ von $\mathrm{tp}(\underline{b}/A)$ (unter der Abbildung $f_*\colon S_n(A) \to S_m(A)$) homöomorph zu $S_n(A\underline{b})$ ist.
Hinweis: Der Homöomorphismus ist wie folgt gegeben: Für alle $\mathcal{M}' \succ \mathcal{M}$ und alle $\underline{c} \in (M')^n$ wird $\mathrm{tp}((\underline{c}, \underline{b})/A)$ auf $\mathrm{tp}(\underline{c}/A\underline{b})$ abgebildet.

1-a) $T \subseteq T'$, $S_n(T') \longrightarrow S_n(T)$

Let $P \in S_n(T') \iff P \cup T'$ is satisfiable. Since $T \subseteq T'$, then $P \cup T$ is also, satisfiable.

we define $f : S_n(T') \longrightarrow S_n(T)$
$P \longmapsto P|_L$

$P|_L =$ set of all L-formula of P. As P is complete and $L \subseteq L'$ then $P|_L$ is also complete. Also, $T \subseteq T'$ and $P|_L \subseteq P$ then $T \cup P|_L$ is satisfiable.

$[\varphi] = \{P \in S_n(T) \mid \varphi \in P\}$, It's enough to show that $f^{-1}([\varphi])$ is closed. which is trivial.

$$f^{-1}([\varphi]_T) = \{P \in S_n(T) \mid \varphi \in P\}$$

$L = \emptyset$

1-b) $L' = \{0,1\}$ $T = \emptyset$ $T' = \{0=1\}$

$x = 0 \in P_1$

$x \neq 0 \in P_2$ $P_1 \neq P_2$ but $P_1|_L = P_2|_L$

but all other member of P_1, P_2 are the same.

$L = L' = \{0,1\}$ $T = \emptyset$ $T' = \{0=1\}$

$P \in S_n(T)$ $P \supseteq \{0 \neq 1\}$ P doesn't have any pre-image in $S_n(T')$

c) $L = L(A)$ $T' = Th_{A'}(M)$ $T = Th_A(M)$
$L' = L(B)$

(1-d) $S_n(A') \longrightarrow S_n(A)$

$p \longmapsto p|_A = \{\varphi \in p : \varphi \text{ an } L(A)\text{-formula}\}$

Let $q \in S^n_A(M)$. then q is a type in M over B.

We should show that $q \cup Th_M(B)$ is consistent.

if not, without loss there exist $\varphi(\underline{b}) \in Th_B(M)$, $\psi(x) \in q$ which are in consistent.
$Th_A(M) \subseteq Th_{A'}(M)$

So $\varphi(b) \vdash \forall \underline{x} \; \neg\psi(\underline{x})$. It implies that $\forall \underline{x} \; \neg\varphi(x) \in Th_A(M)$

on the other hand $\forall \underline{x} \; \neg\psi(x) \in Th_A(M) \subseteq q$
which is contradiction.

$q \cup Th_B(M)$ is satisfiable. so we can extend it to $q \in S_n(A')$

s.t $q|_{L(A)} = p$.

1-e) consider $(\mathbb{Q}, <)$ in $L = \{<\}$

$A = \{1, 2\}$ $\quad$ $A' = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

consider P_1, P_2 such that $x = 5 \in P_1$ but $x \neq 5 \in P_2$ and all elements of P_1, P_2 are the same.

$P_1 \neq P_2$ but $P_1|_{L(A)} = P_2|_{L(A)}$

$f : M^n \longrightarrow M^m$

a) $f_* : S_n(A) \longrightarrow S_m(A)$ for all $M' \succ M$ $\quad f_*(\underbrace{tp(\underline{b}/A)}_{p \in S_n(A)}) = \underbrace{tp(f(\underline{b})/A)}_{\in S_m(A)}$

for all $\underline{b} \in M'$

Let $p \in S_n(A)$,

$\underline{b}, \underline{b}'$ be realizations of p in M', M'' (el. ext of M) $\quad p = tp(\underline{b}/A) = tp(\underline{b}'/A)$

Let $\psi(\underline{x}, \underline{y})$ defines function $f : M^n \longrightarrow M^m$

If $\underbrace{tp(f(\underline{b})/A)}_{q_1} \neq \underbrace{tp(f(\underline{b}')/A)}_{q_2}$

$\exists\ \varphi(\underline{x}, \underline{a}) \in q_1,\ \neg\varphi(\underline{x}, \underline{a}) \in q_2$

$M' \models \exists \underline{y}\ \varphi(\underline{b}) \wedge \psi(\underline{b}, \underline{y})$

$M'' \models \exists y\ \varphi(\underline{b}') \wedge \psi(\underline{b}', y)$

but $\quad tp(\underline{b}/A) = tp(\underline{b}'/A)$

$\Rightarrow \quad M' \models \exists y\ \varphi(\underline{b}) \wedge \psi(b, y)$

$\qquad M' \models \exists y\ \neg\varphi(\underline{b}) \wedge \psi(b, y)$

as ψ define a function.

there is $m \in M'$

$M' \models \varphi(\underline{b}) \wedge \psi(\underline{b}, m)$

$M' \models \neg\varphi(b) \wedge \psi(\underline{b}, m)$

which is contradiction.

$*\ \psi$ defines function f

b) $p \in S_n(A) \longrightarrow \varphi(\underline{x}, \underline{a}) \in p$ maps to $\quad \exists y\ \varphi(x, a) \wedge \psi(\underline{x}, \underline{y})$

c) $f_* : S_n(A) \longrightarrow S_m(A)$ is continivous.

$f_*^{-1}(X_{\{\varphi\}}) = \{ tp(\underline{b}/A) \mid M \models \varphi(f(\underline{b})) \}$

closed set

$\varphi(x_1, \dots, x_m)$

which is clearly closed.

Second part is the same.

d) $f : M^{m+n} \longrightarrow M^m$

$(x_1, \dots, x_{m+n}) \longmapsto (x_1, \dots, x_m)$ $\quad \underline{b} \in M^m$

$$f_*^{-1}(tp(\underline{b}/A)) = tp(\underline{b}/A)$$

$$f_*^{-1}(tp(\underline{b}/A)) \overset{*}{=} \{ tp(\underline{b}'/A) \mid f(\underline{b}') = \underline{b} \}$$

$$\Rightarrow \underline{b}' = (b_1, \dots, b_m, \overbrace{c_{m+1}, \dots, c_{m+n}}^{\underline{c}})$$

$$(f_*)^{-1}(tp(\underline{b}/A)) \cong S_n(A\underline{b})$$

$$\underbrace{tp(\underline{b}\,\underline{c}/A)}_{\downarrow} \longleftrightarrow \underbrace{tp(\underline{c}/A\underline{b})}_{\downarrow} \quad \text{for all } M \prec M', \ \underline{c} \in M^n$$

based (*) is general form of types of this set in some el. ext of M.

form of elements of Sn(A$\underline{b}$) in some el. ext of M.